

第六章 隨機訊號與雜訊RANDOM SIGNALS AND NOISE

作者： 陳昭宏

義守大學 電子工程系

相關單元	學習目標 、 隨機過程 、 重疊性質與調變 、 雜訊 、 白雜訊量測系統 、 類比基頻帶傳輸 、 Pulse detection and matched filters	目錄
------	--	--------------------

目錄

第六章 隨機訊號與雜訊RANDOM SIGNALS AND NOISE.....	1
第一節 學習目標.....	4
第二節 隨機過程(Random Processes)	5
一、 統計平均與相關函數(Ensemble Average and correlation Function).....	5
二、 自相關函數(Autocorrelation function).....	6
三、 互相關函數(Cross correlation function).....	6
四、 範例：隨機訊號之平均值與自相關函數	7
五、 範例：Randomly Phased Sinusoid.....	7
六、 靜態過程(Ergodic and stationary Processes).....	8
七、 廣義靜態訊號Wide-sense stationary (WSS)	10
八、 範例： random digital wave.....	10
九、 高斯隨機過程Gaussian Processes.....	12
十、 隨機訊號(Random signals)	13
十一、 功率頻譜(Power spectrum)	13
十二、 Wiener-Kinchine theorem	14
十三、 Finite-duration signal or truncated random signal.....	14
十四、 範例： Random telegraph Wave.....	15
第三節 重疊性質與調變Superposition and Modulation.....	16
一、 實際訊號，	16
二、 調變(modulation).....	16

三、 訊號線性合成(linear combination)	16
四、 自相關函數、功率頻譜、平均功率之重疊性質(Superposition)	17
五、 非同調訊號(incoherent signal).....	18
六、 分析範例：調變	18
七、 濾波後之隨機訊號(Filtered Random Signals).....	19
八、 線性運算後之隨機訊號	20
九、 範例： Random telegraph Wave.....	20
十、 範例： Hilbert Transform of a random signal	21
第四節 雜訊(Noise)	22
一、 Thermal Noise.....	23
二、 Thermal Noise and Available power.....	23
三、 可用功率(Available power).....	24
四、 白色雜訊(White Noise).....	24
五、 雜訊溫度Noise temperature	25
六、 過濾後雜訊Filtered noise	26
七、 範例：RC電路熱雜訊.....	27
八、 雜訊等效頻寬Noise Equivalent Bandwidth.....	28
第五節 量測應用：白雜訊量測系統System Measurements using white noise	29
一、 量測應用：Amplitude Response.....	30
二、 量測應用：Impulse Response	30
三、 雜訊環境中基頻帶訊號傳輸	30
四、 Additive Noise.....	31
五、 訊號雜訊比(Signal to noise ratio).....	32
六、 AWGN之雜訊溫度	32
第六節 類比基頻帶傳輸(Analog Signal Transmission)	32
一、 類比基頻帶傳輸	33
二、 低通濾波器：	33

三、 接收機之雜訊分析	34
四、 典型之傳輸功率需求	34
五、 範例：cable system	35
六、 雜訊環境中基頻帶脈波傳輸Baseband Pulse transmission with noise.....	36
第七節 Pulse detection and matched filters.....	38
一、 Pulse detection	38
二、 匹配濾波器Matched filters	40

相關單元	學習目標 、 相位與頻率調變 、 傳輸頻寬與失真 、 產生與偵測FM與PM 、 頻率偵測 、 干擾(interference)	目錄
------	---	----

第一節 學習目標

相關單元	學習目標 、 隨機過程 、 重疊性質與調變 、 雜訊 、 白雜訊量測系統 、 類比基頻帶傳輸 、 Pulse detection and matched filters	目錄
------	--	--------------------

- ☐ 定義一隨機過程(random process)之期望(mean)與自相關函數(autocorrelation function)。並描述靜態(stationary)與高斯(gaussian)過程。
- ☐ 瞭解隨機(ergodic)過程之隨機訊號時間平均(time average)與實驗平均(ensemble average)之關連。
- ☐ 給定靜態隨機訊號之自相關函數(autocorrelation function)，計算均方值、變異數與訊號功率。
- ☐ 應用重疊定理(superposition)、調變(modulation)、濾波(filtering)，計算訊號之功率頻譜(power spectrum)。
- ☐ 給予雜訊溫度(noise temperature)，計算白雜訊之自相關函數與功率密度頻譜。
- ☐ 有雜訊輸入時，計算濾波器之雜訊頻寬(noise bandwidth)，輸出功率頻譜與總輸出功率。
- ☐ 描述在何狀況下之正確訊號雜訊比(signal-to-noise ratio)。
- ☐ 分析具雜訊(noise)基頻帶(baseband)類比傳輸系統(transmission)之性能。
- ☐ 在白色雜訊下，計算偵測脈衝之最佳濾波器(optimum)。
- ☐ 分析具雜訊脈衝傳輸系統之性能。

第二節 隨機過程(Random Processes)

相關單元	學習目標 、 隨機過程 、 重疊性質與調變 、 雜訊 、 白雜訊量測系統 、 類比基頻帶傳輸 、 Pulse detection and matched filters	目錄
相關資料	統計平均與相關函數 、 自相關函數 、 互相關函數 、 範例：隨機訊號之平均值與自相關函數 、 範例：Randomly Phased Sinusoid 、 靜態過程 、 廣義靜態訊號 、 範例：random digital wave 、 高斯隨機過程 、 隨機訊號 、 功率頻譜 、 Wiener-Kinchine theorem 、 Finite-duration signal or truncated random signal 、 範例：Random telegraph Wave	隨機過程

- 一個隨機訊號，可以是一隨時間發生之隨機電子處理過程。一般稱為隨機過程(stochastic process)。
- 當隨機之特性加入時間因素會使問題複雜化(假如統計特性會隨時間變化)。
- 幸好，在通訊系統中大部份之隨機過程可以視為靜態過程(stationary or ergodicity process)。
- 靜態過程：統計特性不隨時間變動而改變。

一、統計平均與相關函數(Ensemble Average and correlation Function)

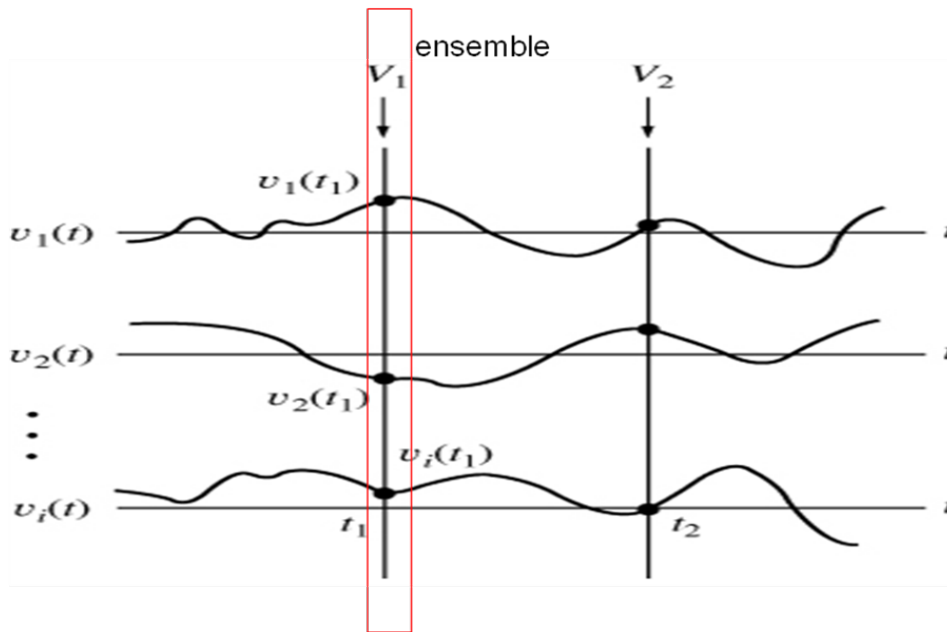
相關資料	統計平均與相關函數 、 自相關函數 、 互相關函數 、 範例：隨機訊號之平均值與自相關函數 、 範例：Randomly Phased Sinusoid 、 靜態過程 、 廣義靜態訊號 、 範例：random digital wave 、 高斯隨機過程 、 隨機訊號 、 功率頻譜 、 Wiener-Kinchine theorem 、 Finite-duration signal or truncated random signal 、 範例：Random telegraph Wave	隨機過程
------	--	----------------------

- 隨機過程(stochastic process)：將實驗之結果映至之一時間之函數。
- Ensemble：所有不同實驗所形成之時間函數，收集在一起，稱 Ensemble。
- Sample function：對某一次實驗所對應之一時間之函數，稱取樣函數
- 如下式定義為期望值運算

$$E[v(t)] = \int_{x(t) \in S} v(t) f_{x(t)}(t) dx$$

Ensemble 平均值為 $\overline{v(t)} \triangleq E[v(t)]$

Waveforms in an ensemble $v(t,s)$



二、自相關函數(Autocorrelation function)

相關資料	統計平均與相關函數、自相關函數、互相關函數、範例：隨機訊號之平均值與自相關函數、範例：Randomly Phased Sinusoid、靜態過程、廣義靜態訊號、範例：random digital wave、高斯隨機過程、隨機訊號、功率頻譜、Wiener-Kinchine theorem、Finite-duration signal or truncated random signal、範例：Random telegraph Wave	隨機過程
------	--	------

- 自相關函數：訊號自己與自己之時間相關性定義為
- 隨機變數之函數：假設有一訊號是一隨機變數 X 之時間函數機率密度函數 $p_X(X)$ 。則

■ Ensemble 平均值

$$\overline{v(t)} = E[g(X, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, t) p_X(x) dx$$

■ 自相關函數

$$R_v(t_1, t_2) = E[g(X, t_1)g(X, t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, t_1)g(x, t_2) p_X(x) dx$$

三、互相關函數(Cross correlation function)

相關資料	統計平均與相關函數、自相關函數、互相關函數、範例：隨機訊號之平均值與自相關函數、範例：Randomly Phased Sinusoid、靜態過程、廣義靜態訊號、範例：random digital wave、高斯隨機過程、隨機訊號、功率頻譜、Wiener-Kinchine theorem、Finite-duration signal or truncated random signal、範例：Random telegraph Wave	隨機過程
------	--	------

- 一般我們會希望分析兩隨機過程之聯合統計(joint statistic)關係

$$R_{vw}(t_1, t_2) = E[v(t_1)w(t_2)]$$

■ 若兩隨機過程符合下式

$$R_{vw}(t_1, t_2) = \overline{v(t_1)} \times \overline{w(t_2)}$$

- ▣ 稱不相關(Uncorrelated)

四、範例：隨機訊號之平均值與自相關函數

相關資料	統計平均與相關函數、自相關函數、互相關函數、範例：隨機訊號之平均值與自相關函數、範例：Randomly Phased Sinusoid、靜態過程、廣義靜態訊號、範例：random digital wave、高斯隨機過程、隨機訊號、功率頻譜、Wiener-Kinchine theorem、Finite-duration signal or truncated random signal、範例：Random telegraph Wave	隨機過程
------	--	------

- ▣ 假設有兩隨機訊號關係如下：

$$v(t) = t + X \quad w(t) = tY$$

- ▣ 應用期望值、相關函數之定義，求兩訊號之
 - ▣ ensemble average。
 - ▣ Auto-correlation function。
 - ▣ Cross-correlation function。

解：

$$v(t) = t + X \quad w(t) = tY$$

- ▣ $v(t)$ 之期望值
- ▣ $v(t)$ 之自相關函數
 - ▣ 同理 $w(t)$
- ▣ 互相關函數
 - ▣ 假如 X 、 Y 為獨立變數(independence)
 - ▣ 則

五、範例：Randomly Phased Sinusoid

相關資料	統計平均與相關函數、自相關函數、互相關函數、範例：隨機訊號之平均值與自相關函數、範例：Randomly Phased Sinusoid、靜態過程、廣義靜態訊號、範例：random digital wave、高斯隨機過程、隨機訊號、功率頻譜、Wiener-Kinchine theorem、Finite-duration signal or truncated random signal、範例：Random telegraph Wave	隨機過程
------	--	------

- ▣ 假如有一振盪器，振幅為 A ，頻率為 ω_0 ，但不知其相位，只有開啟振盪器後觀察其波形才能量測其相位。此時訊號可表示為
 - ▣ 整體而言，任一次之振盪結果皆可視為具隨機變數 Φ 之隨機過程
 - ▣ 其中 Φ 之機率密度分佈函數(PDF)可以視為於 $0 \sim 2\pi$ 間均勻分佈。

求訊號之期望值與自相關函數與均方值。

解：

$$v(t) = A \cos(\omega_0 t + \Phi)$$

□ Φ 之機率密度分佈函數(PDF)可以視為於 $0 \sim 2\pi$ 間均勻分佈

$$p_{\Phi}(\phi) = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

■ 又

$$\begin{aligned} E[\cos(a + nF)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(a + nF) p_{\Phi}(\phi) d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(\alpha + n\phi) \frac{1}{2\pi} d\phi \\ &= [\sin(\alpha + 2\pi n) - \sin \alpha] / 2\pi n = 0 \quad n \neq 0 \end{aligned}$$

■ 所以期望值

$$\overline{v(t)} = E[g(\phi, t)] = AE[\cos(\omega_0 t + \phi)] = 0$$

□ 自相關函數

$$\begin{aligned} R_v(t_1, t_2) &= E[A \cos(\alpha_1 + \Phi) \times A \cos(\alpha_2 + \Phi)] \\ &= (A^2 / 2) E[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\Phi)] \\ &= (A^2 / 2) \{E[\cos(\alpha_1 - \alpha_2)] + E[\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\Phi)]\} \\ &= (A^2 / 2) \{\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + 0\} \end{aligned}$$

■ 代入 α 得自相關函數

$$R_v(t_1, t_2) = (A^2 / 2) \cos \omega_0(t_1 - t_2)$$

■ 最後得均方值

$$\begin{aligned} \text{setting } t_2 = t_1 = t \\ v^2(t) = R_v(t, t) = A^2 / 2 \end{aligned}$$

六、靜態過程(Ergodic and stationary Processes)

相關資料	統計平均與相關函數、自相關函數、互相關函數、範例：隨機訊號之平均值與自相關函數、範例：Randomly Phased Sinusoid、靜態過程、廣義靜態訊號、範例：random digital wave、高斯隨機過程、隨機訊號、功率頻譜、Wiener-Kinchine theorem、Finite-duration signal or truncated random signal、範例：Random telegraph Wave	隨機過程
------	--	------

□ 訊號之時間平均(time average)定義為

$$\langle g[v_i(t)] \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g[v_i(t)] dt$$

□ 若一個隨機過程其所有訊號之時間平均等於整體平均(ensemble average)

$$\langle g[v_i(t)] \rangle = E[g[v_i(t)]]$$

■ 稱 Ergodic，則

$$E[v(t)] = m_v \quad R_v(t_1, t_2) = R_v(t_1 - t_2)$$

□ Ergodic，則

■ 期望值與時間無關

$$E[v(t)] = \bar{v} = m_v, \quad E[v^2(t)] = \overline{v^2} = \sigma_v^2 + m_v^2$$

■ 自相關函數只與時間間隔 τ 有關

$$R_v(\tau) = E[v(t)v(t-\tau)] = E[v(t+\tau)v(t)]$$

□ 且自相關函數又如下性質：

$$R_v(-\tau) = R_v(\tau)$$

$$R_v(0) = \overline{v^2} = \sigma_v^2 + m_v^2$$

$$|R_v(\tau)| \leq R_v(0)$$

■ 又

$$R_v(\pm\infty) = \overline{v^2} = m_v^2$$

■ 若訊號為週期訊號

$$R_v(\tau \pm nT_0) = R_v(\tau) \quad n = 1, 2, \dots$$

■ 定義隨機過程之平均功率為

$$P = E[\langle v^2(t) \rangle] = \langle E[v^2(t)] \rangle$$

■ 若訊號為 stationary Processes

$$P = R_v(0)$$

Ergodic 時

$m_v = \langle v_i(t) \rangle$ ，期望值等於直流(DC)分量

$m_v^2 = \langle v_i(t) \rangle^2$ ，期望值平方等於直流功率

$\overline{v^2} = \langle v_i^2(t) \rangle$ ，均平方值等於全平均功率

變異數 σ_v^2 等於交流功率，等於時變分量之功率。

標準偏差 σ_v 等於交流分量之均方根值(rms)。

- 注意：均方值不同於均方根值(rms)

七、廣義靜態訊號Wide-sense stationary (WSS)

相關資料	統計平均與相關函數、自相關函數、互相關函數、範例：隨機訊號之平均值與自相關函數、範例：Randomly Phased Sinusoid、靜態過程、廣義靜態訊號、範例：random digital wave、高斯隨機過程、隨機訊號、功率頻譜、Wiener-Kinchine theorem、Finite-duration signal or truncated random signal、範例：Random telegraph Wave	隨機過程
------	--	------

- 若一訊號只有期望值與自相關函數與時間無關，稱廣義靜態訊號 Wide-sense stationary (WSS) 。

$$E[v(t)] = \bar{v} = m_v,$$

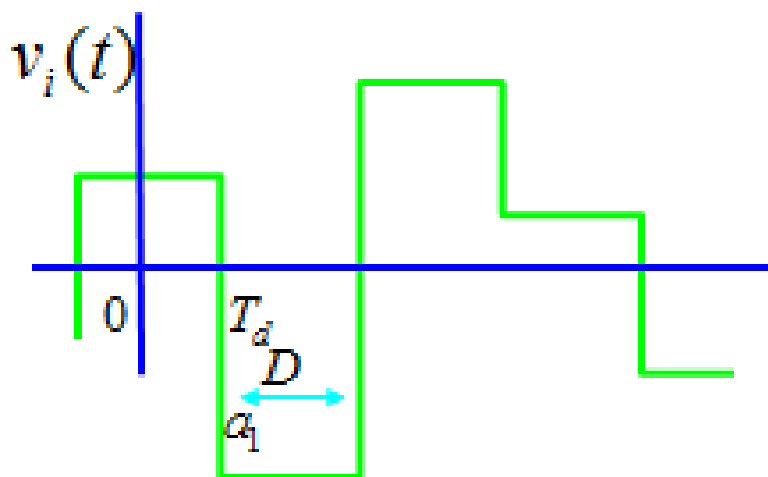
$$R_v(\tau) = E[v(t)v(t-\tau)] = E[v(t+\tau)v(t)]$$

- 注意：請分辨
 - ▣ 靜態過程 Ergodic Processes(strictly in all ensemble average are independent of time)
 - ▣ 廣義靜態過程 Wide-sense stationary (WSS)

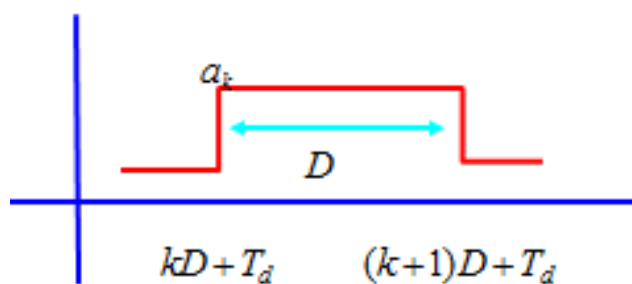
八、範例： random digital wave

相關資料	統計平均與相關函數、自相關函數、互相關函數、範例：隨機訊號之平均值與自相關函數、範例：Randomly Phased Sinusoid、靜態過程、廣義靜態訊號、範例：random digital wave、高斯隨機過程、隨機訊號、功率頻譜、Wiener-Kinchine theorem、Finite-duration signal or truncated random signal、範例：Random telegraph Wave	隨機過程
------	--	------

- 假設如下圖之隨機之數位訊號波形，D 為固定，Td 與 ai 為隨機變數。



□ 其中每一數位脈衝，可表示如下圖



□ 假設不同脈衝之振幅相互獨立，且 $E[a_i] = 0$ ，求此訊號之自相關函數？

解： random digital wave

□ 因為不同脈衝之振幅相互獨立，所以

$$E[a_j a_k] = E[a_j] E[a_k] = 0 \text{ for } j \neq k$$

$$E[v(t)] = E[a_k] = 0 \quad E[v^2(t)] = E[a_k^2] = \sigma^2$$

□ 所以不同相連時間之脈衝

$$E[v(t_1)v(t_2)] = E[a_j a_k] = 0 \quad |t_2 - t_1| > D$$

□ 假設兩脈衝相連之機率為 $P(A)$

$$P(t_1 - kD < T_d < t_2 - kD) = \int_{t_1 - kD}^{t_2 - kD} \frac{1}{D} dt_d = \frac{t_2 - t_1}{D}$$

□ 則

$$\begin{aligned} E[v(t_1)v(t_2)] &= E[a_j a_k] P(A) + E[a_k^2] [1 - P(A)] \\ &= \sigma^2 [1 - P(A)] \quad |t_2 - t_1| < D \end{aligned}$$

□ 則

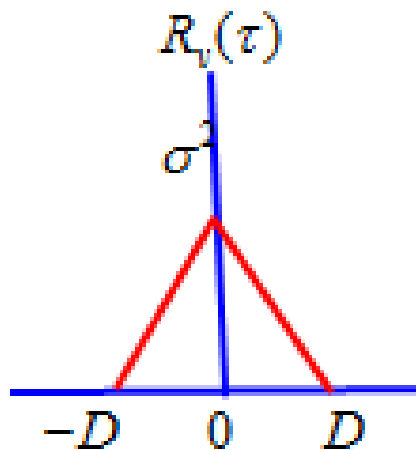
$$P(A) = |t_2 - t_1| / D$$

□ 自相關函數

$$\begin{aligned} E[v(t_1)v(t_2)] &= \sigma^2 \left(1 - \frac{|t_2 - t_1|}{D} \right) & |t_2 - t_1| < D \\ &= 0 & |t_2 - t_1| > D \end{aligned}$$

□ 所以

$$R_v(\tau) = \sigma^2 \Lambda(\tau/D)$$



□ 平均功率

$$P = R_v(0) = \sigma^2$$

九、高斯隨機過程 Gaussian Processes

相關資料

[統計平均與相關函數](#)、[自相關函數](#)、[互相關函數](#)、[範例：隨機訊號之平均值與自相關函數](#)、[範例：Randomly Phased Sinusoid](#)、[靜態過程](#)、[廣義靜態訊號](#)、[範例：random digital wave](#)、[高斯隨機過程](#)、[隨機訊號](#)、[功率頻譜](#)、[Wiener-Kinchine theorem](#)、[Finite-duration signal or truncated random signal](#)、[範例：Random telegraph Wave](#)

[隨機過程](#)

□ 一個隨機過程為於隨機變數 $V=v(t)$ 假如所有邊際(marginal)、聯合(joint)、條件(condition)之機率密度函數(PDF)，皆為高斯函數，稱 $v(t)$

為 Gaussian Processes。

$$P(V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\left(\frac{(v-m_v)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

□ 有下列性質

- ▣ 以期望值與自相關函數完全描述隨機過程。
- ▣ 若滿足廣義靜態過程，則為 ergodic。
- ▣ 若

$$R_v(t_1, t_2) = E[v(t_1)]E[v(t_2)], \text{ 則 } v(t_1) \text{ 與 } v(t_2) \text{ 無關獨立}$$

經線性運算後產生另一 Gaussian Processes

十、隨機訊號(Random signals)

相關資料	統計平均與相關函數 、 自相關函數 、 互相關函數 、範例： 隨機訊號之平均值與自相關函數 、範例： Randomly Phased Sinusoid 、 靜態過程 、 廣義靜態訊號 、範例： random digital wave 、 高斯隨機過程 、 隨機訊號 、 功率頻譜 、 Wiener-Kinchine theorem 、 Finite-duration signal or truncated random signal 、範例： Random telegraph Wave	隨機過程
------	--	----------------------

- 由隨機過程產生隨機訊號(Random signals)，接下來以靜態訊號源(或 ergodic source)為主要分析對象。
- 研討經 filtering 或其他運算後之隨機訊號性質
 - ▣ 輸入與輸出訊號之相關函數，auto-correlation，cross-correlation
 - ▣ 功率頻譜(power spectrum)，應用 Wiener-Kinchine theorem 來定義與分析。

十一、功率頻譜(Power spectrum)

相關資料	統計平均與相關函數 、 自相關函數 、 互相關函數 、範例： 隨機訊號之平均值與自相關函數 、範例： Randomly Phased Sinusoid 、 靜態過程 、 廣義靜態訊號 、範例： random digital wave 、 高斯隨機過程 、 隨機訊號 、 功率頻譜 、 Wiener-Kinchine theorem 、 Finite-duration signal or truncated random signal 、範例： Random telegraph Wave	隨機過程
------	--	----------------------

- 根據 Wiener-Kinchine theorem，靜態訊號之自相關函數與功率頻譜(Power spectrum)。

$$\begin{aligned} R_v(\tau) &\xrightarrow{FT} G_v(f) \\ G_v(f) &\xrightarrow{IFT} R_v(\tau) \end{aligned}$$

- ▣ 平均功率

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_v(f) df = R_v(0) = \overline{v^2} = P$$

$$G_v(f) \geq 0 \quad G_v(-f) = G_v(f)$$

- 若訊號為實數自相關函數為 even-symmetry

十二、Wiener-Kinchine theorem

相關資料	統計平均與相關函數、自相關函數、互相關函數、範例：隨機訊號之平均值與自相關函數、範例：Randomly Phased Sinusoid、靜態過程、廣義靜態訊號、範例：random digital wave、高斯隨機過程、隨機訊號、功率頻譜、Wiener-Kinchine theorem、Finite-duration signal or truncated random signal、範例：Random telegraph Wave	隨機過程
------	--	------

- 靜態隨機訊號之

- 自相關函數 fourier transform 為其功率頻譜(Power spectrum)

$$G_v(f) = \mathcal{F}_T[R_v(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_v(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

- 功率頻譜(Power spectrum) 之反 fourier transform 為自相關函數。

$$R_v(\tau) = \mathcal{F}_T^{-1}[G_v(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} G_v(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

十三、Finite-duration signal or truncated random signal

相關資料	統計平均與相關函數、自相關函數、互相關函數、範例：隨機訊號之平均值與自相關函數、範例：Randomly Phased Sinusoid、靜態過程、廣義靜態訊號、範例：random digital wave、高斯隨機過程、隨機訊號、功率頻譜、Wiener-Kinchine theorem、Finite-duration signal or truncated random signal、範例：Random telegraph Wave	隨機過程
------	--	------

- Finite-duration or truncated random signal

$$v_T(t) \square \begin{cases} v(t) & |t| < T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$$

- 因為能量有限所以存在 fourier transform

$$V_T(f, s) = \int_{-\infty}^{\infty} V_T(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} v(t) dt$$

- 稱

$$V_T(f, s) \text{ 為 } v_T(t, s) \text{ energy spectral density}$$

- 若將 T 視為無限大，可定義隨機訊號之功率頻譜

$$G_v(f) \stackrel{\Delta}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[|V_T(f, s)|^2]$$

十四、範例： Random telegraph Wave

相關資料

[統計平均與相關函數](#)、[自相關函數](#)、[互相關函數](#)、範例：[隨機訊號之平均值與自相關函數](#)、範例：[Randomly Phased Sinusoid](#)、[靜態過程](#)、[廣義靜態訊號](#)、範例：[random digital wave](#)、[高斯隨機過程](#)、[隨機訊號](#)、[功率頻譜](#)、[Wiener-Kinchine theorem](#)、[Finite-duration signal or truncated random signal](#)、範例：[Random telegraph Wave](#)

[隨機過程](#)

□ 如下圖(a) 為隨機之電報訊號波形，求訊號之自相關函數、平均功率、功率密度頻譜

□ 解：

▣ 自相關函數

$$R_v(\tau) = \frac{A^2}{4} (e^{-2\mu|\tau|} + 1)$$

▣ 平均功率

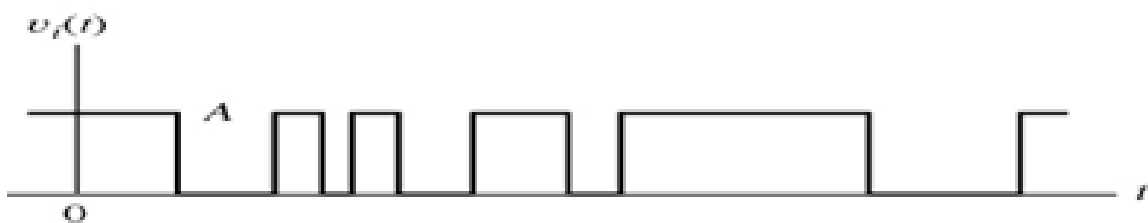
$$P = \overline{v^2} = R_v(0) = \frac{A^2}{2} \quad m_v^2 = R_v(\pm\infty) = \frac{A^2}{4}$$

▣ 功率密度頻譜

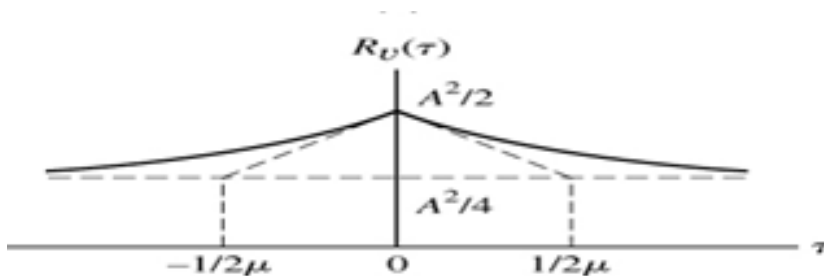
$$G_v(f) = \frac{A^2}{4\mu[1+(\pi f/\mu)^2]} + \frac{A^2}{4} \delta(f)$$

Random telegraph wave (a) Sample function; (b) Autocorrelation; (c) Power spectrum

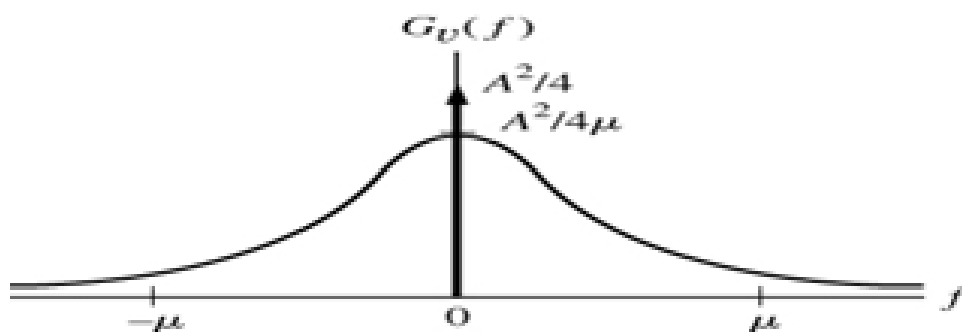
□ (a) Sample function



□ (b) Autocorrelation



□ (c) Power spectrum



第三節 重疊性質與調變 Superposition and Modulation

相關單元	學習目標 、 隨機過程 、 重疊性質與調變 、 雜訊 、 白雜訊量測系統 、 類比基頻帶傳輸 、 Pulse detection and matched filters	目錄
相關資料	實際訊號 、 調變 、 訊號線性合成 、 重疊性質 、 非同調訊號 、 分析範例：調變、濾波後之隨機訊號、線性運算後之隨機訊號 、 範例：Random telegraph Wave 、 範例：Hilbert Transform of a random signal	重疊性質 調變

一、實際訊號，

相關資料	實際訊號 、 調變 、 訊號線性合成 、 重疊性質 、 非同調訊號 、 分析範例：調變、濾波後之隨機訊號、線性運算後之隨機訊號 、 範例：Random telegraph Wave 、 範例：Hilbert Transform of a random signal	重疊性質 調變
------	--	--

- ❑ 若各訊號產生源為互相獨立，線性合成之訊號之自相關函數、功率頻譜、平均功率具有重疊性質。
- ❑ 若由獨立訊號源所產生，一般為非同調訊號(incoherent signal)

二、調變(modulation)

相關資料	實際訊號 、 調變 、 訊號線性合成 、 重疊性質 、 非同調訊號 、 分析範例：調變、濾波後之隨機訊號、線性運算後之隨機訊號 、 範例：Random telegraph Wave 、 範例：Hilbert Transform of a random signal	重疊性質 調變
------	--	--

- ❑ 為一時變運算，但在某些情況下，調變後之訊號可以視為靜態隨機過程：兩訊號獨立聯靜態(independence and joint stationary)

三、訊號線性合成(linear combination)

相關資料	實際訊號 、 調變 、 訊號線性合成 、 重疊性質 、 非同調訊號 、 分析範例：調變、濾波後之隨機訊號、線性運算後之隨機訊號 、 範例：Random telegraph Wave 、 範例：Hilbert Transform of a random signal	重疊性質 調變
------	--	--

例：調變、濾波後之隨機訊號、線性運算後之隨機訊號、範例：
Random telegraph Wave、範例：Hilbert Transform of a random signal

性質
調變

- 有些隨機訊號可視為由其他隨機訊號之線性組合。如：假設有兩訊號 $(v(t), w(t))$ 有聯合靜態之性質

$$R_{vw}(t_1, t_2) = R_{vw}(t_1 - t_2)$$

□ 令

$$z(t) = v(t) \pm w(t)$$

□ 則

$$R_z(\tau) = R_v(\tau) + R_w(\tau) \pm [R_{vw}(\tau) + R_{wv}(\tau)]$$

- 功率頻譜為

$$G_z(f) = G_v(f) + G_w(f) \pm [G_{vw}(f) + G_{wv}(f)]$$

- 由此可以定義交互功率頻譜密度(cross-spectral density)

$$G_{vw}(f) = \mathcal{F}_\tau^\Delta [R_{vw}(\tau)]$$

四、自相關函數、功率頻譜、平均功率之重疊性質(Superposition)

相關資料

實際訊號、調變、訊號線性合成、重疊性質、非同調訊號、分析範
例：調變、濾波後之隨機訊號、線性運算後之隨機訊號、範例：
Random telegraph Wave、範例：Hilbert Transform of a random signal

重疊
性質
調變

- 交互功率頻譜密度

$$G_{vw}(f) = \mathcal{F}_\tau^\Delta [R_{vw}(\tau)]$$

- 當兩訊號為不相關且期望值為 0，

$$R_{vw}(\tau) = R_{wv}(\tau) = 0$$

- 則得到自相關函數、功率頻譜、平均功率之重疊性質

$$R_z(\tau) = R_v(\tau) + R_w(\tau)$$

$$G_z(f) = G_v(f) + G_w(f)$$

$$\overline{z^2} = \overline{v^2} + \overline{w^2}$$

五、非同調訊號(incoherent signal)

相關資料	實際訊號 、 調變 、 訊號線性合成 、 重疊性質 、 非同調訊號 、 分析範例 ： 調變 、 濾波後之隨機訊號 、 線性運算後之隨機訊號 、 範例 ： Random telegraph Wave 、 範例 ： Hilbert Transform of a random signal	重疊性質 調變
------	--	--

- 滿足

$$R_{vw}(\tau) = R_{wv}(\tau) = 0$$

- 稱此兩訊號(v(t),w(t))為非同調(incoherent)
- 訊號若由獨立訊號源所產生，一般為非同調訊號(incoherent signal)，且功率之重疊性是常見之一般物理現象。
 - 例如：兩音樂家合唱(independence source)時，因沒有完整之同步(incoherent)，所以總功率為個別功率相加。

六、分析範例：調變

相關資料	實際訊號 、 調變 、 訊號線性合成 、 重疊性質 、 非同調訊號 、 分析範例 ： 調變 、 濾波後之隨機訊號 、 線性運算後之隨機訊號 、 範例 ： Random telegraph Wave 、 範例 ： Hilbert Transform of a random signal	重疊性質 調變
------	--	--

- 調變訊號可表示

$$z(t) = v(t) \cos(\omega_c t + \Phi)$$

- 假設 v(t)是靜態隨機過程，Φ為隨機變數(均勻分佈 0~2π)
- 雖然調變是一時變情形，但此類型之訊號最後導出

$$G_z(f) = \frac{1}{4} [G_v(f - f_c) + G_v(f + f_c)]$$

$$R_z(\tau) = \frac{1}{2} R_v(\tau) \cos 2\pi f_c \tau$$

$$z(t) = v(t)w(t)$$

□ 調變可視為乘積運算

▣ 若兩訊號獨立聯合靜態

$$R_z(\tau) = R_v(\tau)R_w(\tau) \quad G_z(f) = G_v(f) * G_w(f)$$

▣ 因為訊號與載波是可假設為獨立聯合靜態，所以

$$G_z(f) = \frac{1}{4} [G_v(f - f_c) + G_v(f + f_c)]$$

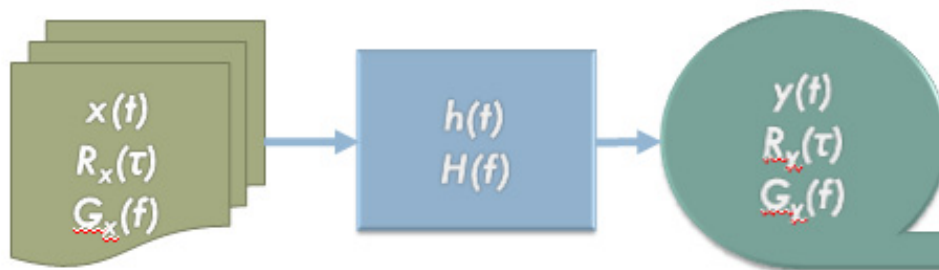
▣ 因為載波為 $\cos$ ，所以

$$G_w(f) = \frac{1}{2} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]$$

七、濾波後之隨機訊號(Filtered Random Signals)

相關資料	實際訊號 、 調變 、 訊號線性合成 、 重疊性質 、 非同調訊號 、 分析範例 ： 調變 、 濾波後之隨機訊號 、 線性運算後之隨機訊號 、 範例 ： Random telegraph Wave 、 範例 ： Hilbert Transform of a random signal	重疊性質 調變
------	--	------------

□ 濾波運算，如下圖



□ 濾波運算可視為一系統摺積運算(convolution)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t - \lambda)d\lambda$$

▣ 濾波前、後訊號之互相關函數為

$$R_{yx}(\tau) = h(\tau) * R_x(\tau)$$

□ 濾波後訊號之自相關函數為

$$R_y(\tau) = h(-\tau) * R_{yx}(\tau) = h(-\tau) * h(\tau) * R_x(\tau)$$

□ 輸出之功率頻譜

$$G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f)$$

- 也可求濾波後訊號自相關函數與平均功率

$$R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \left[|H(f)|^2 G_x(f) \right]$$

$$\overline{y^2} = R_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 G_x(f) df$$

輸出之平均值

$$m_y = \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) d\lambda \right] m_x = H(0) m_x$$

八、線性運算後之隨機訊號

相關資料	實際訊號 、 調變 、 訊號線性合成 、 重疊性質 、 非同調訊號 、 分析範例 ： 調變 、 濾波後之隨機訊號 、 線性運算後之隨機訊號 、 範例 ： Random telegraph Wave 、 範例 ： Hilbert Transform of a random signal	重疊性質 調變
------	--	--

- 其他之線性運算也有類似之性質，輸出之功率頻譜、輸出之平均值

$$G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f)$$

$$m_y = \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) d\lambda \right] m_x = H(0) m_x$$

- 如微分

$$y(t) = dx(t) / dt$$

then $G_y(f) = (2\pi f)^2 G_x(f)$

- 積分

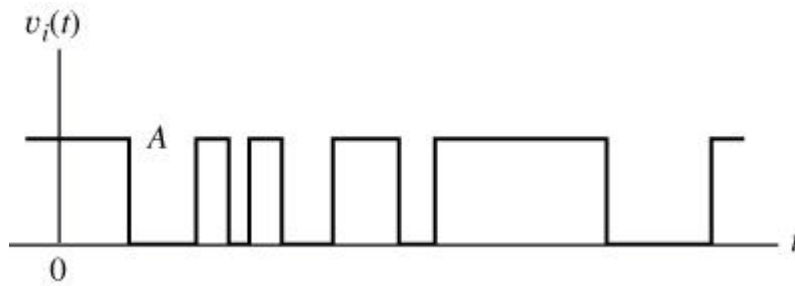
$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda, \quad m_x = 0$$

then $G_y(f) = (2\pi f)^{-2} G_x(f)$

九、範例： Random telegraph Wave

相關資料	實際訊號 、 調變 、 訊號線性合成 、 重疊性質 、 非同調訊號 、 分析範例 ： 調變 、 濾波後之隨機訊號 、 線性運算後之隨機訊號 、 範例 ：	重疊性質 調變
------	---	--

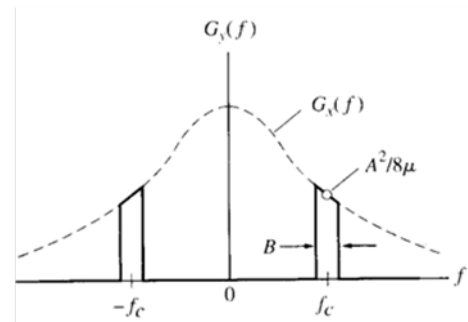
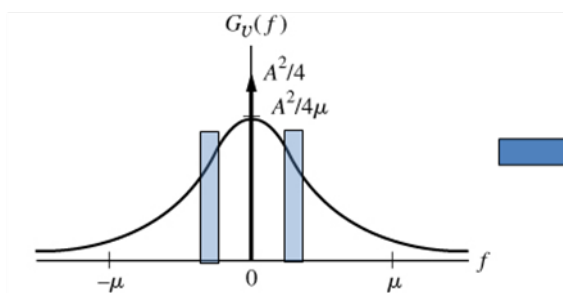
- 將下列隨機訊號輸入理想帶通濾波器，



$bandwidth = B$

$$\overline{y^2} \approx 2B \times \left(\frac{A^2}{8\mu} \right) = A^2 B / 4\mu \ll A^2 / 4\pi$$

- 求輸出訊號之頻譜？與平均功率



解：

- 輸出訊號之頻譜

$$G_y(f) \approx \begin{cases} A^2/8\mu & -B/2 < |f - f_c| < B/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 與平均功率

$$\overline{y^2} \approx 2B \times \left(A^2/8\mu \right) = A^2 B / 4\mu \ll A^2 / 4\pi$$

十、範例： Hilbert Transform of a random signal

相關資料

實際訊號、調變、訊號線性合成、重疊性質、非同調訊號、分析範例：調變、濾波後之隨機訊號、線性運算後之隨機訊號、範例：Random telegraph Wave、範例：Hilbert Transform of a random signal

重疊性質
調變

- Hilbert Transform 定義如下：

$$h_Q(t) = \frac{1}{\pi t} \quad H_Q(f) = -j \operatorname{sgn} f$$

- 求任何隨機訊號 Hilbert Transform 之
 - 頻譜表示？
 - 自相關函數表示？

解：Hilbert Transform of a random signal

- 因為

$$G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f)$$

- 且

$$|H_Q(f)|^2 = 1$$

- 所以

$$G_x^\wedge(f) = G_x^\wedge(f) \quad R_x^\wedge(\tau) = \mathcal{F}_\tau^{-1} \left[G_x^\wedge(f) \right] = R_x(\tau)$$

- 轉換前後訊號之互相關為

$$R_{xx}^\wedge(\tau) = h_Q(\tau) * R_x(\tau) = R_x^\wedge(\tau)$$

$$R_{xx}^\wedge(\tau) = -R_x(\tau)$$

第四節 雜訊(Noise)

相關單元	學習目標 、 隨機過程 、 重疊性質與調變 、 雜訊 、 白雜訊量測系統 、 類比基頻帶傳輸 、 Pulse detection and matched filters	目錄
相關資料	Thermal Noise 、 Thermal Noise and Available power 、 可用功率 、 白色雜訊 、 雜訊溫度 、 過濾後雜訊 、 範例：RC電路熱雜訊 、 雜訊等效頻寬	雜訊

- 不要之電訊號來源很多，有人為干擾(interference)或自然產生之雜訊。
 - 人為干擾(interference)：可能由其他通訊系統、點火系統、交流音(AC hum)、…等等。
 - 自然產生之雜訊：大氣層之電離效應、太陽幅射、打雷、電子隨機熱運動幅射。
 - 完全無法避免之雜訊為熱雜訊(thermal noise)，是由電子在各類媒體中因熱運動所產生之電雜訊號。
 - 熱雜訊只能透過濾波降低!!!無法消除。

一、Thermal Noise

相關資料	Thermal Noise 、 Thermal Noise and Available power 、 可用功率 、 白 色雜訊 、 雜訊溫度 、 過濾後雜訊 、 範例：RC電路熱雜訊 、 雜訊等效 頻寬	雜訊
------	--	--------------------

“Thermal noise is the noise produced by the random motion of charged particles (usually electrons) in conducting media.”

- 根據 kinetic theory，熱雜訊之功率與溫度有關，且機率分佈函數為高斯分佈，zero mean，variance：

$$\overline{v^2} = \sigma_v^2 = \frac{2(\pi kT)^2}{3h} R \quad V^2$$

- 其中

T: 為溫度，單位kelvin(K)

k: Boltzmann constant = $1.38 \times 10^{-23} \text{ J / K}$

h: Planck constant = $6.62 \times 10^{-34} \text{ J - s}$

二、Thermal Noise and Available power

相關資料	Thermal Noise 、 Thermal Noise and Available power 、 可用功率 、 白 色雜訊 、 雜訊溫度 、 過濾後雜訊 、 範例：RC電路熱雜訊 、 雜訊等效 頻寬	雜訊
------	--	--------------------

- 功率密度頻譜

$$G_v(f) = \frac{2Rh|f|}{e^{h|f|/kT} - 1} \quad V^2 / \text{Hz}$$

- 頻率很小時，可一階近似為

$$G_v(f) \approx 2RkT \left(1 - \frac{h|f|}{2kT} \right) \quad |f| \ll \frac{kT}{h}$$

- 標準溫度

$$T_0^\Delta = 290\text{K} (63^\circ \text{F})$$

$$kT_0 \approx 4 \times 10^{-21} \text{ W-s}$$

- 所以在小頻帶範圍可近似為

$$G_v(f) = 2RKT \quad (V^2 / Hz)$$

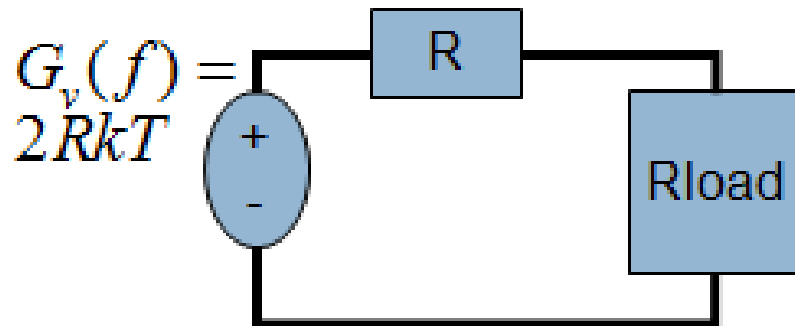
三、可用功率(Available power)

相關資料

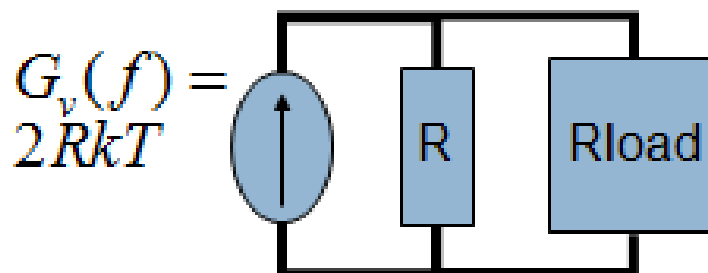
[Thermal Noise](#)、[Thermal Noise and Available power](#)、[可用功率](#)、[白色雜訊](#)、[雜訊溫度](#)、[過濾後雜訊](#)、[範例：RC電路熱雜訊](#)、[雜訊等效頻寬](#)

[雜訊](#)

- 若將熱雜訊源以
 - ▣ thevenin 等效電路，接上負載時



- ▣ norton 等效電路，接上負載時



- 根據最大功率傳輸定理
 - ▣ $R_{load}=R$ 時有最大功率
 - ▣ 得

$$G_a(f) = \frac{G_v(f)}{4R} = \frac{1}{2}kT \quad (W / Hz)$$

四、白色雜訊(White Noise)

相關資料

[Thermal Noise](#)、[Thermal Noise and Available power](#)、[可用功率](#)、[白色雜訊](#)、[雜訊溫度](#)、[過濾後雜訊](#)、[範例：RC電路熱雜訊](#)、[雜訊等效頻寬](#)

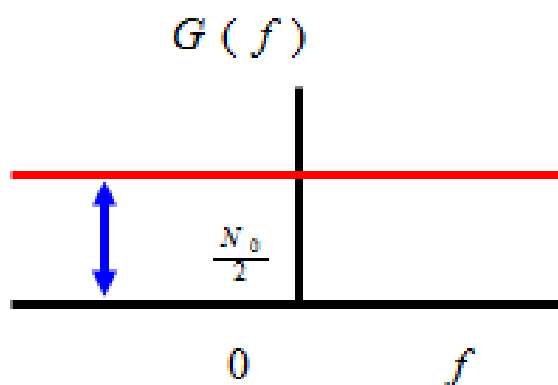
[雜訊](#)

- 除了電阻之熱雜訊外，尚有許多雜訊源有極寬之頻譜(且為平坦：所有頻率之密度幾乎一樣)，且高斯分佈，因此我們簡稱為白雜訊(white noise，

取名如白光)。

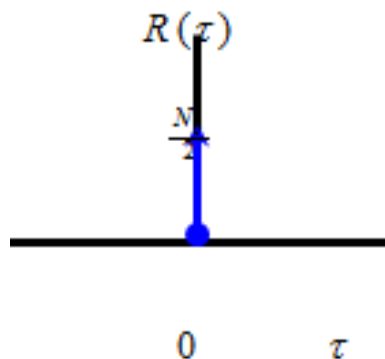
▣ 功率密度頻譜

$$G(f) = N_0 / 2$$



▣ 自相關函數

$$R(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$



▣ 雜訊電壓, 雜訊電流

$$N_{0v} = 4RkT$$

$$N_{0i} = 4kT / R$$

五、雜訊溫度 Noise temperature

相關資料	Thermal Noise 、 Thermal Noise and Available power 、 可用功率 、 白色雜訊 、 雜訊溫度 、 過濾後雜訊 、 範例：RC電路熱雜訊 、 雜訊等效頻寬	雜訊
------	--	----

- 若雜訊並非由電子熱運動產生，為分析方便也可定義雜訊溫度(等效於電阻熱雜訊之溫度)。

- ▣ 定義

$$T_N \triangleq \frac{2G_a(f)}{k} = \frac{N_0}{k}$$

- ▣ 對應之熱雜訊
 ▣ 因此雜訊溫度不見得是為實際上之溫度，
 ▣ 例如若有一設備之雜訊溫度為

$$T_N = 3000^\circ K$$

設備並不一定有如此之高溫

六、過濾後雜訊 Filtered noise

相關資料	Thermal Noise 、 Thermal Noise and Available power 、 可用功率 、 白色雜訊 、 雜訊溫度 、 過濾後雜訊 、 範例：RC電路熱雜訊 、 雜訊等效頻寬	雜訊
------	--	----

- 若熱雜訊加至一 LTI 系統，則系統輸出雜訊為

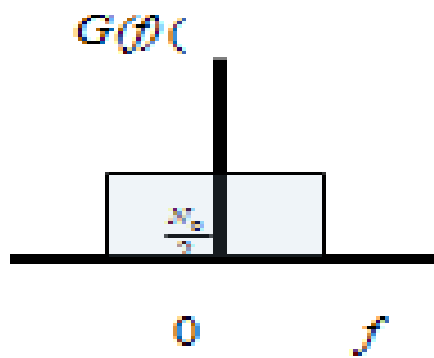
$$G_y(f) = \frac{N_0}{2} |H(f)|^2, \quad R_y(\tau) = \frac{N_0}{2} \mathcal{F}_\tau^{-1} \left[|H(f)|^2 \right]$$

$$\overline{y^2} = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

- 若經過一理想低通濾波器，輸出雜訊

$$G_y(f) = \frac{N_0}{2} \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \quad R_y(\tau) = N_0 B \text{sinc } 2B\tau$$

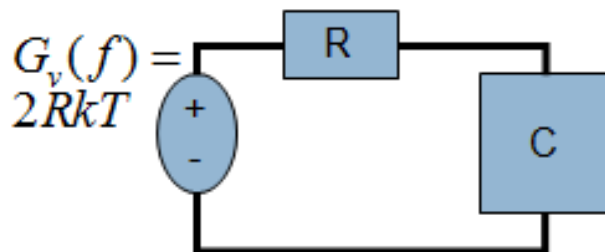
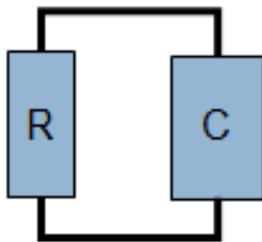
$$\overline{y^2} = N_0 B$$



七、範例：RC 電路熱雜訊

相關資料 [Thermal Noise](#)、[Thermal Noise and Available power](#)、[可用功率](#)、[白色雜訊](#)、[雜訊溫度](#)、[過濾後雜訊](#)、[範例：RC 電路熱雜訊](#)、[雜訊等效頻寬](#) [雜訊](#)

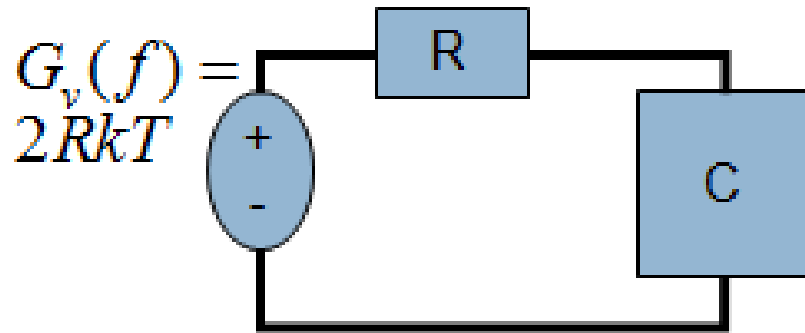
□ 如圖之 RC 電路，假設電阻溫度為 T ，求此 RC 電路所輸出之雜訊為？



- 解法：
- ▣ 可以化為等效圖
 - ▣ 再計算 RC 濾波器之轉移函數
 - ▣ 應用濾波之頻譜公式計算輸出功率

解：RC 電路熱雜訊

- 如右圖等效



□ RC 之轉移函數

$$|H_{rc}(f)| = \frac{1}{[1 + (f/B)^2]^{1/2}}, \quad B = \frac{1}{2\pi RC}$$

□ 濾波後輸出

$$G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f) = \frac{2RkT}{1 + (f/B)^2}$$

$$R_y(\tau) = 2RkT \pi B e^{-2\pi B|\tau|} = \frac{kT}{C} e^{-|\tau|/RC}$$

$$\overline{y^2} = R_y(0) = \frac{kT}{C}$$

八、雜訊等效頻寬 Noise Equivalent Bandwidth

相關資料	Thermal Noise 、 Thermal Noise and Available power 、 可用功率 、 白色雜訊 、 雜訊溫度 、 過濾後雜訊 、 範例：RC 電路熱雜訊 、 雜訊等效頻寬	雜訊
------	---	----

□ 平均雜訊功率(average noise bandwidth)

$$N = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = N_0 \int_0^{\infty} |H(f)|^2 df$$

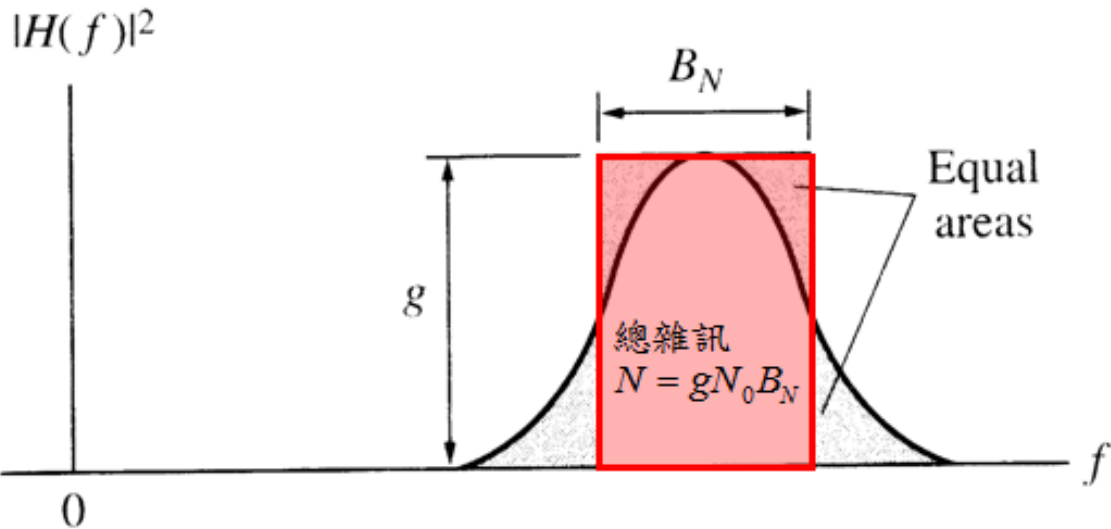
□ 以所有雜訊相等之概念，定義雜訊等效頻寬(Noise Equivalent Bandwidth)

$$B_N \triangleq \frac{1}{g} \int_0^{\infty} |H(f)|^2 df, \quad \text{where} \quad g = |H(f)|_{\max}^2$$

▣ 總雜訊

$$N = gN_0B_N$$

- 雜訊等效頻寬之圖示



- 以 RC 電路為例，雜訊等效頻寬

$$B_N = \int_0^{\infty} \frac{df}{1 + (f/B)^2} = \frac{\pi}{2} B = \frac{1}{4RC}$$

- 平均雜訊功率，注意與 R 無關。

$$\overline{y^2} = \sigma_Y^2 = N = gN_0B_N \quad \sigma_Y = \sqrt{N} = \sqrt{gN_0B_N}$$

第五節 量測應用：白雜訊量測系統 System Measurements using white noise

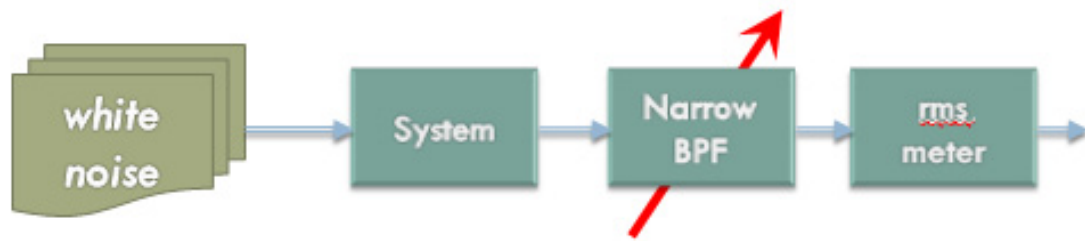
相關單元	學習目標 、 隨機過程 、 重疊性質與調變 、 雜訊 、 白雜訊量測系統 、 類比基頻帶傳輸 、 Pulse detection and matched filters	目錄
相關資料	量測應用：Amplitude Response 、 量測應用：Impulse Response 、 雜訊環境中基頻帶訊號傳輸 、 Additive Noise 、 訊號雜訊比 、 AWGN之雜訊溫度	雜訊

- 雜訊等效頻寬：

$$B_N = \frac{N}{gN_0}$$

- **振幅響應**：應用白雜訊求系統之振幅響應，以白雜訊加至訊號輸入端，量測輸出響應。
- **脈衝響應**：應用白雜訊求系統之脈衝響應。

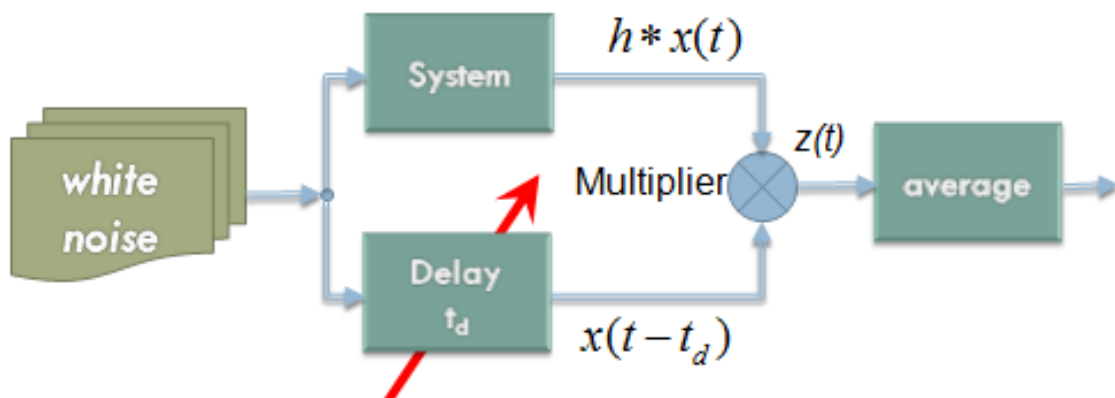
一、量測應用：Amplitude Response



相關資料	量測應用：Amplitude Response 、 量測應用：Impulse Response 、 雜訊環境中基頻帶訊號傳輸 、 Additive Noise 、 訊號雜訊比 、 AWGN之雜訊溫度	雜訊
------	---	--------------------

- 應用白雜訊求系統之振幅響應，以白雜訊加至訊號輸入端，量測輸出響應。
 - ▣ 將白雜訊輸入系統，
 - ▣ 並以解析之間格頻帶掃描，並量測 rms(功率)。

二、量測應用：Impulse Response



相關資料	量測應用：Amplitude Response 、 量測應用：Impulse Response 、 雜訊環境中基頻帶訊號傳輸 、 Additive Noise 、 訊號雜訊比 、 AWGN之雜訊溫度	雜訊
------	---	--------------------

- 應用白雜訊求系統之脈衝響應。
 - ▣ 輸入白雜訊至系統
 - ▣ 並掃描 Delay 之時間，將各時間所對應之平均功率記下，為該時間之脈衝響應。

三、雜訊環境中基頻帶訊號傳輸

相關資料	量測應用：Amplitude Response 、 量測應用：Impulse Response 、 雜訊環境中基頻帶訊號傳輸 、 Additive Noise 、 訊號雜訊比 、 AWGN之雜訊溫度	雜訊
------	---	--------------------

- **基頻帶通訊**(baseband communication)：只分析基頻帶訊號在線性系統中

傳輸與處理，不考慮載波調變(carrier modulation)。

“Noise often adds to the information-bearing signal at various points between the source and the destination.”

- 加性雜訊(Additive noise)：指雜訊加入系統之方式為線性加成運算(訊號相加)。
- ▣ 透過適當之轉換，可以將載波調變等帶通現象轉換至基頻帶。
- ▣ 分析上述系統特性，可瞭解大部份通訊系統之問題。

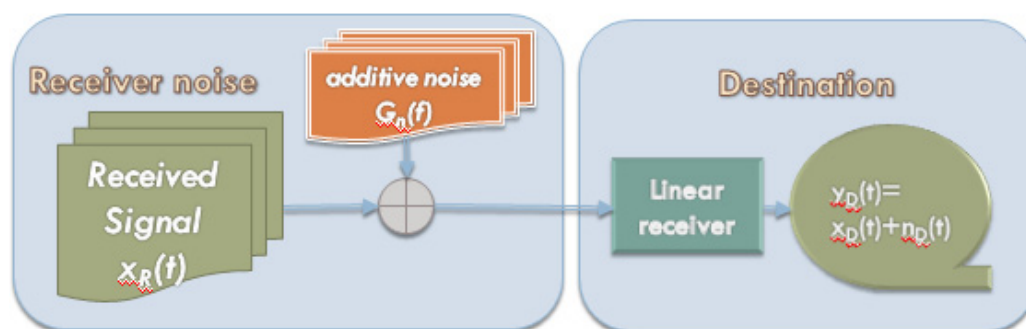
四、Additive Noise

相關資料	量測應用：Amplitude Response、量測應用：Impulse Response、雜訊環境中基頻帶訊號傳輸、Additive Noise、訊號雜訊比、AWGN之雜訊溫度	雜訊
------	---	----

- 若訊號為加性雜訊(Additive noise)可表示為

$$y_D(t) = X_D(t) + n_D(t)$$

- 訊號與雜訊模型方塊圖如下



- 由 ergodic 訊號源產生之雜訊，mean=0,

power spectral density $G_n(f)$

- 因訊號與雜訊不相關，總訊號功率為

$$\overline{y_D^2} = \overline{x_D^2} + \overline{n_D^2}$$

- ▣ 其中

$$S_D \triangleq \overline{x_D^2} \quad N_D \triangleq \overline{n_D^2} \quad \text{so that} \quad \overline{y_D^2} = S_D + N_D$$

- 當雜訊之機率分佈為高斯分佈，稱加性高斯白雜訊(additive white gaussian noise, AWGN)

五、訊號雜訊比(Signal to noise ratio)

相關資料	量測應用： Amplitude Response 、 量測應用：Impulse Response 、 雜訊環境中基頻帶訊號傳輸 、 Additive Noise 、 訊號雜訊比 、 AWGN之雜訊溫度	雜訊
------	--	--------------------

- 訊號雜訊比：訊號功率與雜訊功率之比值，表示如下：

$$SNR = \frac{\Delta \text{訊號功率}}{\text{雜訊功率}}$$

- 所以

$$(S/N)_D = S_D / N_D = \overline{x_D^2} / \overline{n_D^2}$$

- 其中雜訊若為熱雜訊，則功率

$$N_D = g_R N_0 B_N$$

六、AWGN之雜訊溫度

相關資料	量測應用： Amplitude Response 、 量測應用：Impulse Response 、 雜訊環境中基頻帶訊號傳輸 、 Additive Noise 、 訊號雜訊比 、 AWGN之雜訊溫度	雜訊
------	--	--------------------

- 雜訊功率

$$N_D = g_R N_0 B_N$$

- 其中雜訊密度 N_0
- 在白色雜訊(white noise)情況，雜訊密度可以以雜訊溫度表示

$$N_0 = kT_N = kT_0 (T_N / T_0) \approx 4 \times 10^{-21} (T_N / T_0) \quad W / Hz$$

- 其中

$$\begin{aligned} T_N &: \text{雜訊溫度} \\ T_0 &: \text{標準溫度}(300K) \\ T_N &= 0.2T_0, \text{低雜訊系統} \\ T_N &= 10T_0, \text{"noisy" system} \end{aligned}$$

第六節 類比基頻帶傳輸(Analog Signal Transmission)

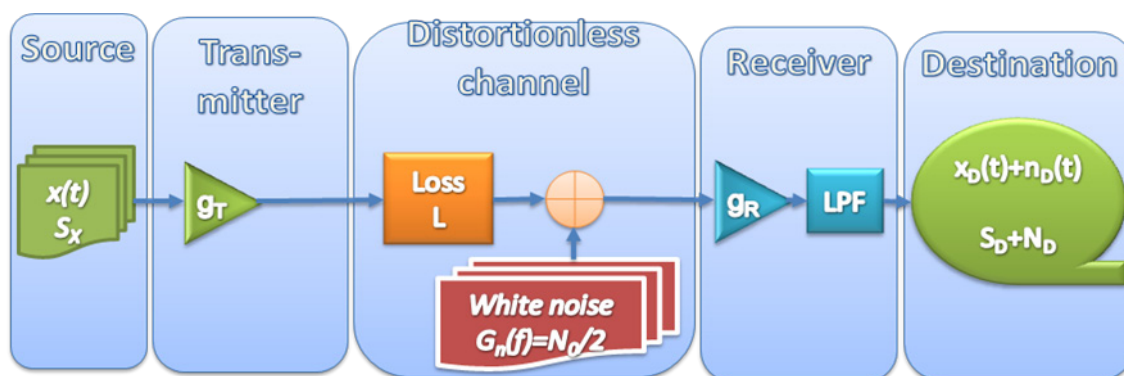
相關單元	學習目標 、 隨機過程 、 重疊性質與調變 、 雜訊 、 白雜訊量測系統 、 類比	目錄
------	---	--------------------

	基頻帶傳輸、 Pulse detection and matched filters	
相關資料	類比基頻帶傳輸 、 低通濾波器 、 接收機之雜訊分析 、 典型之傳輸功率需求 、 範例：cable system 、 雜訊環境中基頻帶脈波傳輸	基頻傳輸

□ 下圖為基本類比基頻帶傳輸系統。

- ▣ 若訊號頻寬為 W
- ▣ 通道(channel)之頻寬 $> W$ ，無失真通道指通道輸出

$$X_D(t) = Kx(t - t_d), \quad K: \text{衰減延遲}:$$



一、類比基頻帶傳輸

相關資料	類比基頻帶傳輸 、 低通濾波器 、 接收機之雜訊分析 、 典型之傳輸功率需求 、 範例：cable system 、 雜訊環境中基頻帶脈波傳輸	基頻傳輸
------	---	------

□ 功率定義

- ▣ 發射功率

$$S_T = \overline{g_t x^2} = g_t S_x$$

- ▣ 接收功率

$$S_R = \overline{x_R^2} = S_T / L$$

- ▣ 目的地功率

$$S_D = \overline{x_D^2} = g_R S_R$$

二、低通濾波器：

相關資料	類比基頻帶傳輸 、 低通濾波器 、 接收機之雜訊分析 、 典型之傳輸功率需求 、 範例：cable system 、 雜訊環境中基頻帶脈波傳輸	基頻傳輸
------	---	------

- ▣ 訊號頻寬 W ，理想濾波，頻寬

$$B = W = B_N$$

三、接收機之雜訊分析

相關資料	類比基頻帶傳輸 、 低通濾波器 、 接收機之雜訊分析 、 典型之傳輸功率需求 、 範例：cable system 、 雜訊環境中基頻帶脈波傳輸	基頻傳輸
------	---	----------------------

$$(S/N)_D = S_R / (N_0 W)$$

▣ dB 表示

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{DdB} = 10 \log_{10} \left(\frac{S_R}{k T_n W} \right) \approx S_{RdBm} + 174 - 10 \log_{10} \left(\frac{T_n}{T_0} W \right)$$

□ 雜訊加入前之分析

$$S_R = S_T / L, \quad dB \text{表示 } S_{RdB} = S_{TdB} - L_{dB}$$

▣ 所以

$$(S/N)_D = S_T / (L N_0 W)$$

□ 傳輸通道分析，若

▣ 使用中繼器(repeater)

$$(S/N)_1 = S_T / (L_1 N_0 W)$$

▣ 無中繼器(repeater)，只一段路徑損失 L

▣ 有 M 中繼器(repeater)，M 段路徑損失 $L_1 = L/M$ ，假設每中繼器之增益設定等於該段之損失，則

$$(S/N)_D \approx \frac{1}{m} \left(\frac{S}{N} \right)_1 = \frac{L}{m L_1} \left(\frac{S_T}{L N_0 W} \right)$$

四、典型之傳輸功率需求

相關資料	類比基頻帶傳輸 、 低通濾波器 、 接收機之雜訊分析 、 典型之傳輸功率需求 、 範例：cable system 、 雜訊環境中基頻帶脈波傳輸	基頻傳輸
------	---	----------------------

Signal type	Frequency rang	SNR, dB
Barely intelligible voice	500Hz~2kHz	5-10
Telephone voice	200Hz~3.2kHz	25-35
AM quality audio	100Hz~5kHz	40-50
High-fidelity audio	20Hz~20kHz	55-65
Video	60Hz~4.2MHz	45-55

五、範例：cable system

相關資料	類比基頻帶傳輸 、 低通濾波器 、 接收機之雜訊分析 、 典型之傳輸功率需求 、 範例：cable system 、 雜訊環境中基頻帶脈波傳輸	基頻傳輸
------	---	----------------------

- cable system 有通道衰減

$$L = 140dB = 10^{14}$$

- ▣ 雜訊溫度

$$T_N = 5T_0$$

- ▣ 若要傳輸高傳真音響訊號

頻寬 W 的 ~~20kHz~~ 訊號功率

$$(S/N)_D \geq 60dB$$

求所需之傳輸功率？

解：

$$S_{RdBm} + 174 - 10\log_{10}(5 \times 20 \times 10^3) \geq 60dB$$

- 所以接收端之功率

$$S_{RdBm} \geq -64dBm \approx 4 \times 10^{-7} mW$$

- 傳輸功率 40000W(太大)

$$S_T = LS_{RdBm} \geq 4 \times 10^7 mW = 40000W$$

範例：cable system(改進)

- 若在傳輸路徑中間加入中繼器(repeater)
- 則衰減

$$L = 140dB \leftrightarrow L = 2L_1, L_1 = 70dB$$

- 系統改善因子

$$\frac{L}{mL_1} = \frac{10^{14}}{2 \times 10^7} = 5 \times 10^6$$

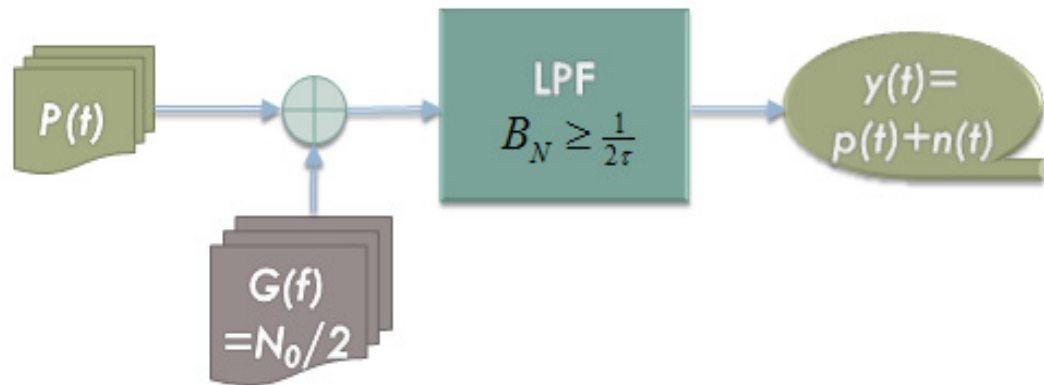
- 所以傳輸功率 8mW,為實際可應用之功率值

$$S_T \geq (4 \times 10^7 mW) / (5 \times 10^6) = 8mW$$

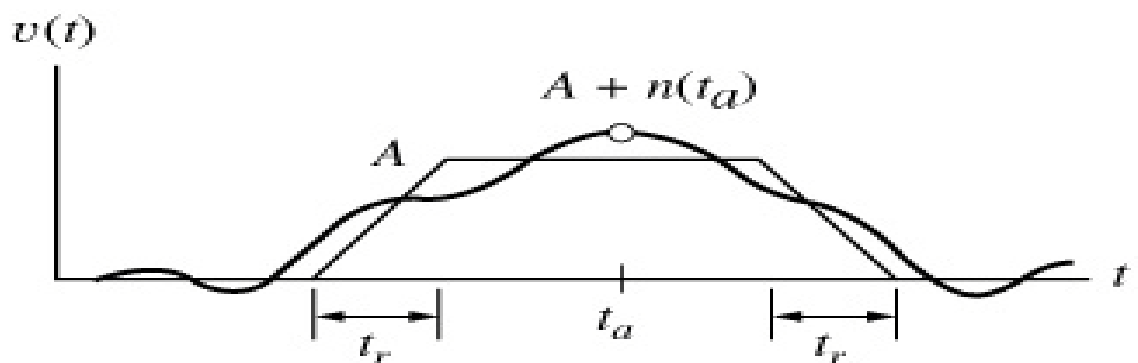
六、雜訊環境中基頻帶脈波傳輸 Baseband Pulse transmission with noise

相關資料	類比基頻帶傳輸、低通濾波器、接收機之雜訊分析、典型之傳輸功率需求、範例：cable system、雜訊環境中基頻帶脈波傳輸	基頻傳輸
------	---	------

- Pulse measurement in noise (a) Model



- (b) Waveform



□ Baseband Pulse 接收，單一取樣模式如下

$$y(t_a) = A + n(t_a) = A + \varepsilon_A$$

■ 其中

$$\varepsilon_A = n(t_a), \quad \text{amplitude error}$$

■ 誤差之變異數為

$$\sigma_A^2 = \overline{n^2} = N_0 B_N$$

□ 假設

$$A^2 = E_p / \tau, \quad B_N \geq 1/(2\tau)$$

■ 其中

$$E_p : \text{脈衝能量}, \quad \tau : \text{脈衝寬}$$

■ 則變異數(雜訊能量)下限為

$$\sigma_A^2 \geq \frac{N_0}{2\tau} = \frac{N_0 A^2}{2E_p}$$

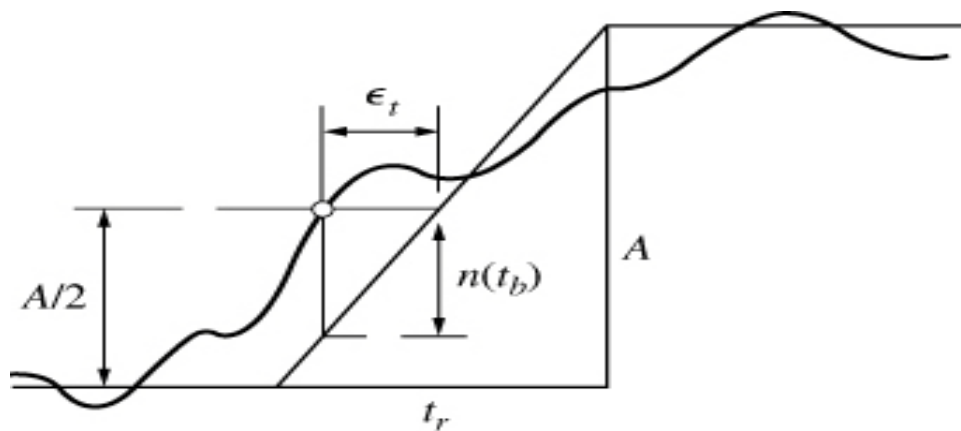
□ 量測脈衝到達時間(arrival time or duration)，一般以接收訊號準位達訊號某固定值(如 $A/2$)。

■ 此量測之雜訊擾動(noise perturbation $n(t_b)$)

■ Time position error ε

$$\varepsilon / n(t_b) = t_r / A,$$

$$\rightarrow \varepsilon = n(t_b)(t_r / A)$$



$$\sigma_t^2 = (t_r / A)^2 \overline{n^2} = (t_r / A)^2 N_0 B_N$$

□ Time position error ε

■ 代入

$$t_r \approx 1/(2B_N), \quad A^2 = E_p / \tau$$

■ 得

$$\sigma_t^2 \approx \frac{N_0}{4B_N A^2} = \frac{N_0 \tau}{4B_N E_p}$$

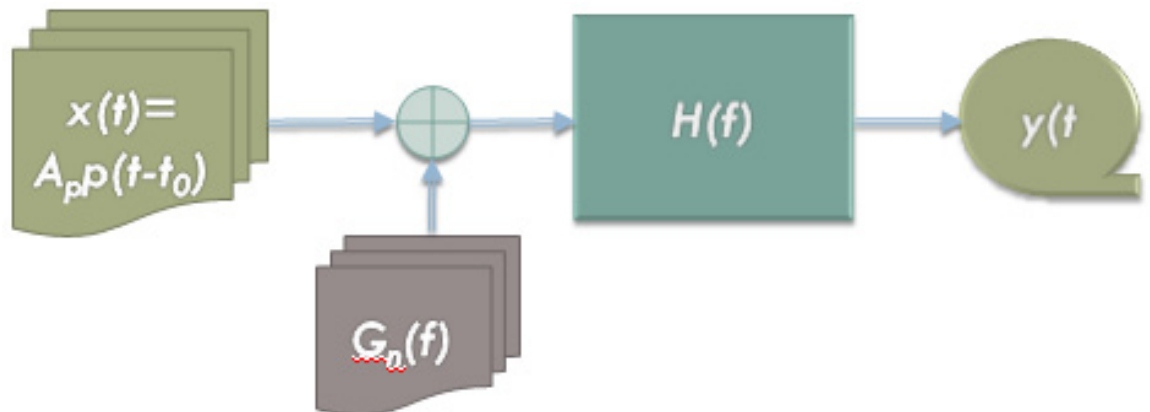
■ 若傳輸頻寬 B_T

$$\sigma_t^2 \geq \frac{N_0}{4B_T A^2} = \frac{N_0 \tau}{4B_T E_p}$$

第七節 Pulse detection and matched filters

相關單元	學習目標 、 隨機過程 、 重疊性質與調變 、 雜訊 、 白雜訊量測系統 、 類比基頻帶傳輸 、 Pulse detection and matched filters	目錄
相關資料	Pulse detection and matched filters Pulse detection 、 匹配濾波器	

□ 脈衝偵測之方塊圖模型如下：

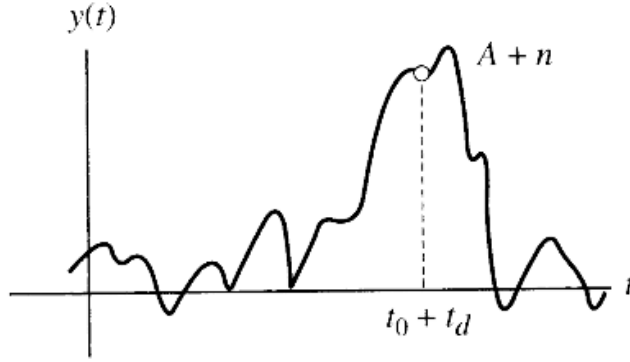


一、Pulse detection

相關資料	Pulse detection and matched filters Pulse detection 、 匹配濾波器	
------	--	--

□ 接收訊號

$$X_R(f) = A_p P(f) e^{-j\omega t_0}$$



▣ 頻譜

$$X_R(t) = A_P p(t - t_0)$$

□ 脈衝之能量為

$$E_p = \int_{-\infty}^{\infty} |X_R(f)|^2 df = A_p^2 \int_{-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 df$$

□ 接收之脈衝振幅

$$A = \mathcal{F}^{-1}[H(f)X_R(f)] \Big|_{t=t_0+t_d} = A_P \int_{-\infty}^{\infty} H(f)P(f)e^{+j\omega t_d} df$$

□ 受雜訊干擾，所以

$$\left(\frac{A}{\sigma}\right)^2 = A_p^2 \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)P(f)e^{j\omega t_d} df \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 G_n(f) df}$$

□ 最大之 SNR

$$\left(\frac{A}{\sigma}\right)_{\max}^2 = \frac{2A_p^2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 df = \frac{2E_p}{N_0}$$

□ 相對應之最佳濾波器為

$$H_{opt}(f) = K \frac{P^*(f)e^{-j\omega t_d}}{G_n(f)}$$

▣ 若雜訊為白雜訊

$$G_n(f) = N_0/2$$

$$\left(\frac{A}{\sigma}\right)_{\max}^2 = A_p^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|P(f)|^2}{G_n(f)} df$$

二、匹配濾波器 Matched filters

相關資料 [Pulse detection and matched filters](#)
[Pulse detection](#)、[匹配濾波器](#)

- 當雜訊為白雜訊，使偵測器有最大 SNR 之濾波器，稱此脈衝訊號之匹配濾波器

$$H_{opt}(f) = K \frac{P^*(f)e^{-j\omega t_d}}{G_n(f)}$$

$$G_n(f) = N_0/2$$

$$h_{opt}(f) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{2K}{N_0} P^*(f)e^{-j\omega t_d} \right] = \frac{2K}{N_0} p(t_d - t)$$