

第三章 訊號傳輸與濾波 SIGNAL TRANSMISSION AND FILTERING

作者： 陳昭宏

義守大學 電子工程系

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失 增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
|------|---|--------------------|

目錄

| | |
|---|----|
| 第三章 訊號傳輸與濾波 SIGNAL TRANSMISSION AND FILTERING | 1 |
| 第一節 學習目標..... | 4 |
| 第二節 線性非時變系統響應 Response of LTI Systems..... | 5 |
| 一、 脈衝響應與重疊積分(Impulse response and superposition Integral)..... | 5 |
| 二、 步階響應(Step response)..... | 6 |
| 三、 轉移函數..... | 8 |
| 四、 系統輸出響應&頻率響應 | 8 |
| 五、 轉移函數與頻率響應..... | 9 |
| 六、 範例：一階系統之頻率響應..... | 10 |
| 第三節 方塊圖分析..... | 12 |
| 一、 常見系統功能(方塊圖分析)..... | 12 |
| 二、 並聯(parallel)..... | 12 |
| 三、 串接(cascade)..... | 13 |
| 四、 迴授(feedback)..... | 13 |
| 五、 範例：Zero-order hold(時域)..... | 14 |
| 第四節 傳輸中之訊號失真(Signal Distortion in Transmission)..... | 15 |
| 一、 無失真傳輸(Distortionless Transmission) | 15 |
| 二、 線性失真(Linear distortion)..... | 16 |
| 三、 固定相位移：線性失真(Linear distortion)..... | 17 |
| 四、 等化器(Equalization)概念..... | 17 |
| 五、 等化器(Equalization)..... | 17 |

| | |
|---|----|
| 六、 多重路徑失真之等化器 | 19 |
| 七、 非線性失真 | 20 |
| 八、 抑制器companding(compressing & expanding) | 20 |
| 第五節 傳輸損失、增益與分貝(dB)(Transmission Loss、GAIN and Decibels) | 22 |
| 一、 系統功率增益(Power gain) | 22 |
| 二、 傳輸損失與中繼器 | 23 |
| 三、 光纖(Fiber Optics) | 24 |
| 四、 射頻傳輸 | 25 |
| 五、 直視傳輸(line-of-sight propagation) | 26 |
| 六、 範例 :衛星中繼系統(Satellite relay system) | 26 |
| 第六節 濾波器與濾波(Filter and Filtering) | 28 |
| 一、 Transfer function of a ideal bandpass filter | 28 |
| 二、 理想濾波器(ideal filter) | 28 |
| 三、 有限頻寬與有限時間(Bandlimiting and Timelimiting) | 29 |
| 四、 典型帶通濾波器(Typical amplitude ratio of a real bandpass filter) | 30 |
| 五、 實際濾波器(real filter) | 30 |
| 六、 常見濾波器設計方法 | 31 |
| 七、 脈波響應與上升時間 | 32 |
| 八、 Response of an LPF | 32 |
| 第七節 正交濾波器與希伯特轉換(Quadrature Filters and Hilbert Transforms) | 34 |
| 一、 希伯特轉換性質(Property of Hilbert Transforms) | 34 |
| 二、 範例 Hilbert transform of a cosine Signal | 34 |
| 三、 範例: Hilbert transform of a Rectangular Signal | 35 |
| 第八節 相關函數與頻譜密度(Correlation and Spectral Density) | 36 |
| 一、 功率訊號之相關性(Correlation of power Signals) | 36 |
| 二、 能量訊號之相關性(Correlation of Energy Signals) | 38 |
| 三、 頻譜密度函數(Spectral Density Functions) | 39 |

| | |
|-------------------------------|----|
| 四、 範例：Comb Filter(梳型濾波器)..... | 41 |
|-------------------------------|----|

第一節 學習目標

相關單元

[學習目標](#)、[線性非時變系統](#)、[方塊圖分析](#)、[傳輸中訊號失真](#)、[傳輸損失](#)
[增益與分貝](#)、[濾波器與濾波](#)、[正交濾波器](#)、[相關函數與頻譜密度](#)

[目錄](#)

- 以脈衝 (impulse) 響應 (response)、步階 (step) 響應、轉移函數 (transfer function) 等，描述與應用 LTI 系統之輸出輸入關係。
- 使用頻域分析系統之準確或進似輸出。
- 由系統方塊圖求得轉移函數。
- 分辨 amplitude distortion、delay distortion、linear distortion and nonlinear distortion。
- 指出已知通道無失真傳輸之頻帶範圍，求給定頻帶之無失真傳輸所須之等化器(equalization)規格。
- 應用 dB 計算傳輸系統、電纜、放大器所需之訊號功率。
- 討論訊號經光纖與衛星系統傳輸所需之特性。
- 指出與畫出理想 LPF、BPF、HPF 之 $H(f)$ 與 $h(t)$
- 由 $H(f)$ 找出實際 LPF 之 3dB 頻寬。
- 描述與應用脈波傳輸所需之頻寬。
- 定義功率訊號或能量訊號之互相關與自相關函數，並描述相關性質。
- 描述 Wiener-Kinchine 定理與頻譜密度函數(spectral density function)之性質
- 給定系統 $H(f)$ 與輸入之相關函數或頻譜密度函數，求出輸出之相關函數或頻譜密度函數。

第二節 線性非時變系統響應 Response of LTI Systems

| | | |
|------|--|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失 、 增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 脈衝響應與重疊積分 、 步階響應 、 轉移函數 、 系統輸出響應&頻率響應 、 轉移函數與頻率響應 、 範例：一階系統之頻率響應 | |

□ 系統輸出入關係 $y(t) = F[x(t)]$

□ 假設系統 F 線性非時變系統

$$x(t) = \sum_k a_k x_k(t)$$

□ 訊號為基本訊號之線性組合

$$y(t) = \sum_k a_k F[x_k(t)]$$

□ 則輸出為各基本訊號輸出之線性組合

□ 輸入延遲輸出也延遲

$$F[x(t-t_d)] = y(t-t_d)$$

□ 線性非時變系統關係可表示為下列微分方程

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

一、脈衝響應與重疊積分 (Impulse response and superposition Integral)

| | | |
|------|--|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失 、 增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 脈衝響應與重疊積分 、 步階響應 、 轉移函數 、 系統輸出響應&頻率響應 、 轉移函數與頻率響應 、 範例：一階系統之頻率響應 | |

□ 系統脈衝響應

$$h(t) = F[\delta(t)]$$

□ 任意訊號輸入

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\delta(t-\lambda)d\lambda$$

- 系統之輸出

$$y(t) = F\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\delta(t-\lambda)d\lambda\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)F[\delta(t-\lambda)]d\lambda$$

- 線性非時變系統之輸出入關係可表示，系統脈衝響應與輸入訊號之褶積

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda$$

二、步階響應(Step response)

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失 、 增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 脈衝響應與重疊積分 、 步階響應 、 轉移函數 、 系統輸出響應&頻率響應 、 轉移函數與頻率響應 、 範例：一階系統之頻率響應 | |

- 步階響應 $g(t) = F[u(t)]$

- 脈衝響應與步階響應之關係

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt}$$

- 系統褶積運算之微分運算

$$\frac{d}{dt}[v * w(t)] = v(t) * \left[\frac{dw(t)}{dt}\right]$$

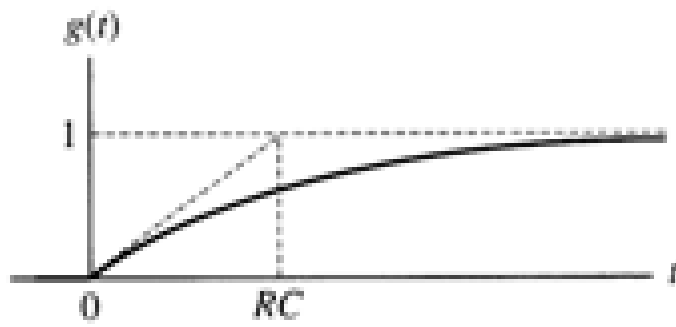
一階系統之時間響應_步階響應

- 一階系統

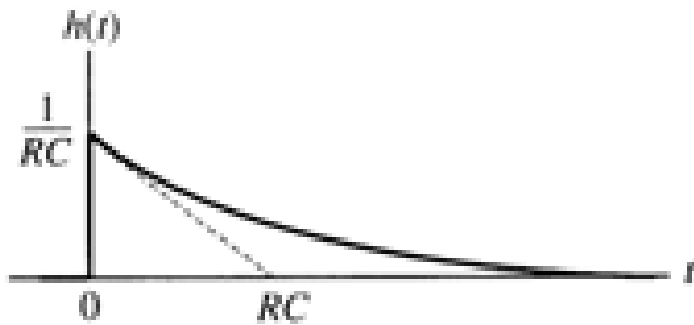
$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

- 系統脈衝響應

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$$



(a)



(b)

- 步階響應

$$g(t) = (1 - e^{-t/RC})u(t)$$

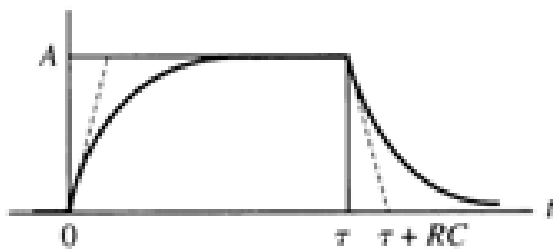
一階系統之時間響應_方波脈衝響應

- 一階系統
- 方波脈衝響應

$$y(t) = 0, \quad t < 0$$

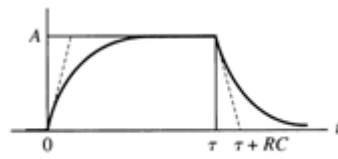
$$y(t) = A(1 - e^{-t/RC}), \quad 0 < t < \tau$$

$$y(t) = A(1 - e^{-\tau/RC})e^{-(t-\tau)/RC}, \quad t > \tau$$

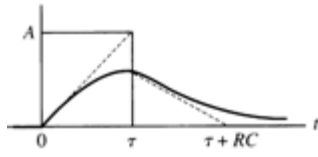


(a)

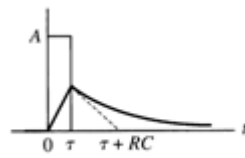
□ 脈衝寬



$\tau \gg 1/(RC)$



$\tau \sim 1/(RC)$



$\tau \ll 1/(RC)$

三、轉移函數

| | | |
|------|--|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失 、 增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 脈衝響應與重疊積分 、 步階響應 、 轉移函數 、 系統輸出響應&頻率響應 、 轉移函數與頻率響應 、 範例：一階系統之頻率響應 | |

□ 轉移函數：脈衝響應之富氏轉換

$$H(f) = \mathcal{F}[h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

□ 實數系統之轉移函數

$$H(-f) = H^*(f)$$

$$\arg H(-f) = -\arg H(f), \quad |H(-f)| = |H(f)|$$

四、系統輸出響應&頻率響應

| | | |
|------|--|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失 、 增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 脈衝響應與重疊積分 、 步階響應 、 轉移函數 、 系統輸出響應&頻率響應 、 轉移函數與頻率響應 、 範例：一階系統之頻率響應 | |

□ 假設輸入(相量型式)

$$x(t) = A_x e^{j\phi_x} e^{j2\pi f_0 t}, \quad -\infty < t < \infty$$

- 系統輸出

$$y(t) = h(t) \otimes x(t)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) A_x e^{j\phi_x} e^{j2\pi f_0(t-\lambda)} d\lambda \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{-j2\pi f_0 \lambda} d\lambda \right] A_x e^{j\phi_x} e^{j2\pi f_0 t} \\ &= H(f_0) A_x e^{j\phi_x} e^{j2\pi f_0 t} \end{aligned}$$

- 頻率響應 $H(f_0)$

- 系統輸出(相量型式)

$$y(t) = A_y e^{j\phi_y} e^{j2\pi f_0 t}, \quad -\infty < t < \infty$$

$$A_y = |H(f_0)| A_x, \quad \phi_y = \arg H(f_0) + \phi_x$$

五、轉移函數與頻率響應

| | | |
|------|--|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失 、 增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 脈衝響應與重疊積分 、 步階響應 、 轉移函數 、 系統輸出響應&頻率響應 、 轉移函數與頻率響應 、 範例：一階系統之頻率響應 | |

- 假設輸入系統輸出(相量型式)

$$x(t) = A_x \cos(2\pi f_0 t + \phi_x)$$

$$y(t) = A_y \cos(2\pi f_0 t + \phi_y)$$

- 頻率響應

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

$$|Y(f)| = |H(f)| |X(f)|$$

$$\arg Y(f) = \arg H(f) + \arg X(f)$$

- 功率頻譜

$$|Y(f)|^2 = |H(f)|^2 |X(f)|^2$$

- 能量

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 |X(f)|^2 df$$

- 系統輸入、輸出響應與轉移函數關係

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(f)X(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)X(f)e^{j2\pi ft} df$$

- 系統為 LTI 系統，轉移函數可表示如下

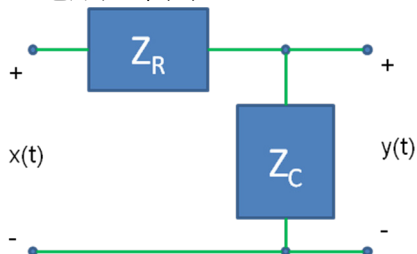
$$H(f) = \frac{b_m(j2\pi f)^m + \dots + b_1(j2\pi f) + b_0}{a_n(j2\pi f)^n + \dots + a_1(j2\pi f) + a_0}$$

- 當訊輸入訊號為單頻訊號，則輸入輸出之時域比值為該頻率之轉移函數
 - 當 $x(t) = e^{j2\pi ft}$ ， $H(f) = \frac{y(t)}{x(t)}$

六、範例：一階系統之頻率響應

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 脈衝響應與重疊積分 、 步階響應 、 轉移函數 、 系統輸出響應&頻率響應 、 轉移函數與頻率響應 、 範例：一階系統之頻率響應 | |

- RC 電路如下圖：



- 若輸入為 $x(t)$ ，輸出為 $y(t)$ ，求此圖之轉移函數，並簡單分析系統性能。
解法：

- 應用節點分析，以頻域計算

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{(1/j2\pi fC)}{(1/j2\pi fC) + R} = \frac{1}{1 + j2\pi fRC} = \frac{1}{1 + j(f/B)}$$

- 定義系統頻寬

$$B = \frac{1}{2\pi RC}$$

- 轉移函數之振幅與相位響應分別為

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/B)^2}}, \quad \arg H(f) = -\arctan \frac{f}{B}$$

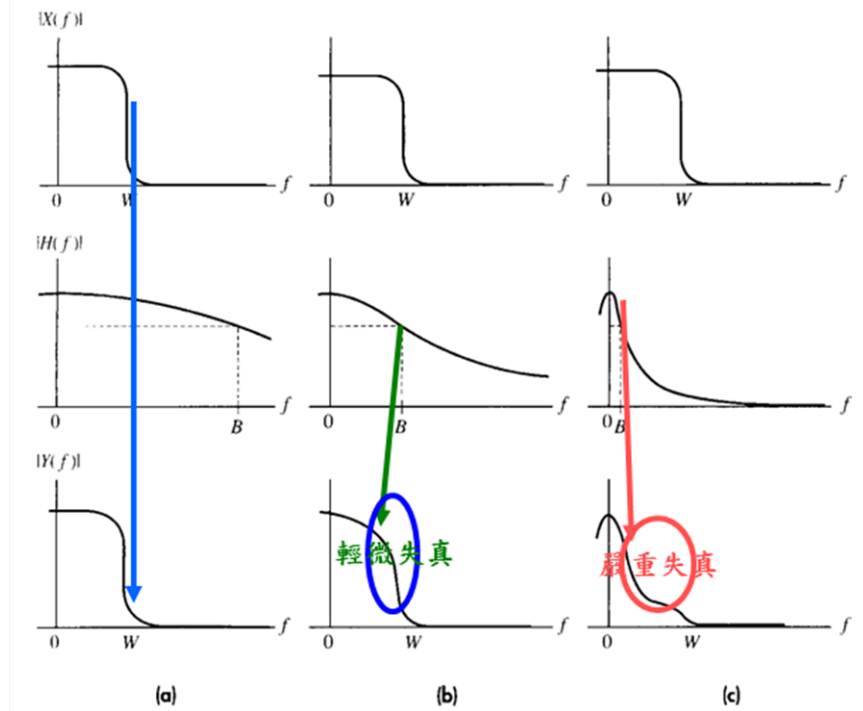
說明：

$$H(f) = \frac{1}{1 + j(f/B)}$$

- 稱低通濾波器，頻寬(通過訊號之頻帶寬)

$$B = \frac{1}{2\pi RC}$$

- 訊號通過此系統，若訊號頻寬 W
 - $W \ll B$ ：稱非失真傳輸(undistorted transmission)
 - $W \sim B$ ：依訊號頻譜與系統轉移函數而定
 - $W \gg B$ ：稱失真(distorted)
- 訊號通過低通濾波器結果
- 圖(a) $W \ll B$ ，圖(b) $W \sim B$ ，圖(c) $W \gg B$



第三節 方塊圖分析

一、常見系統功能(方塊圖分析)

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失 增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 常見系統功能 、 並聯 、 串接 、 迴授 、 範例：Zero-order hold(時域) | |

| Time-Domain operation | | Transfer function |
|------------------------------|--|----------------------------|
| 常數乘 Scalar multiplication | $y(t) = \pm Kx(t)$ | $H(f) = \pm K$ |
| 微分 Differentiation | $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ | $H(f) = j2\pi f$ |
| 積分 Integration | $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\lambda)d\lambda$ | $H(f) = \frac{1}{j2\pi f}$ |
| 時間延遲 Time delay | $y(t) = x(t - t_d)$ | $H(f) = e^{-j2\pi f t_d}$ |

- 應用常見系統功能，經由並聯、串接、迴授可已組成多種多功能系統或系統分析。

- 並聯(parallel)：

$$H(f) = H_1(f) + H_2(f)$$

$$Y(f) = [H_1(f) + H_2(f)]X(f)$$

- 串接(cascade)：

$$H(f) = H_1(f)H_2(f)$$

$$Y(f) = H_2(f)[H_1(f)X(f)]$$

- 迴授(feedback)：

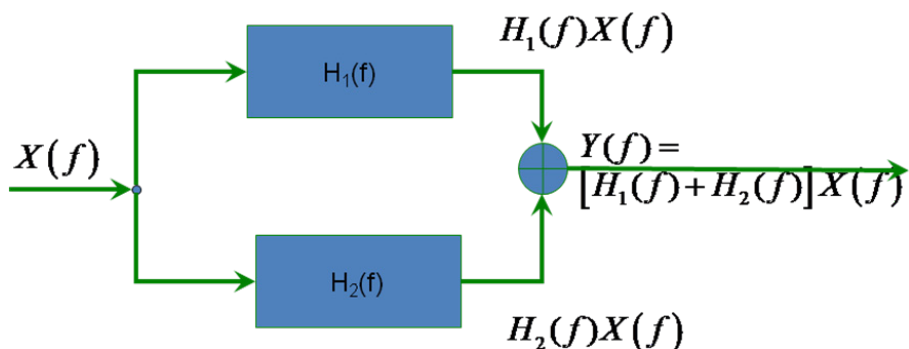
$$H(f) = \frac{H_1(f)}{1 + H_1(f)H_2(f)}$$

$$Y(f) = \{H_1(f) / [1 + H_1(f)H_2(f)]\}X(f)$$

二、並聯(parallel)

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失 增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 常見系統功能 、 並聯 、 串接 、 迴授 、 範例：Zero-order hold(時域) | |

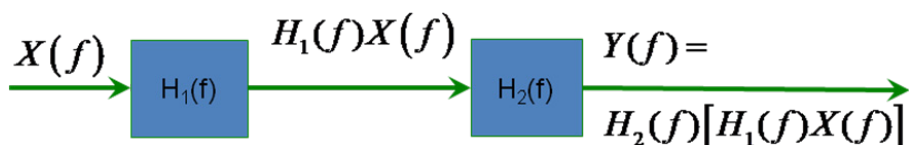
$$H(f) = H_1(f) + H_2(f)$$



三、串接(cascade)

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失 增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 常見系統功能 、 並聯 、 串接 、 迴授 、 範例 ： Zero-order hold(時域) | |

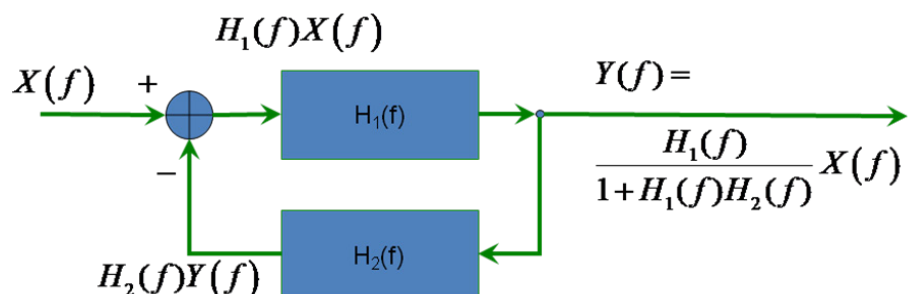
$$H(f) = H_1(f)H_2(f)$$



四、迴授(feedback)

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失 增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 常見系統功能 、 並聯 、 串接 、 迴授 、 範例 ： Zero-order hold(時域) | |

$$H(f) = \frac{H_1(f)}{1 + H_1(f)H_2(f)}$$

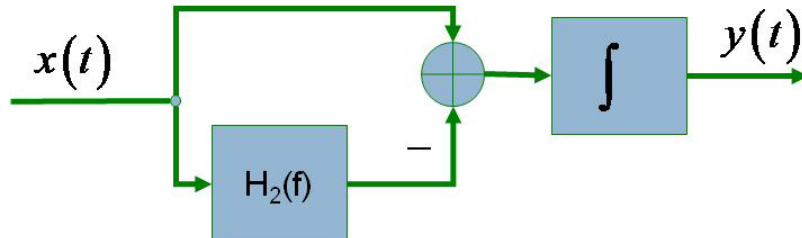


$$Y(f) = H_1(f)[X(f) - H_2(f)Y(f)]$$

五、範例：Zero-order hold(時域)

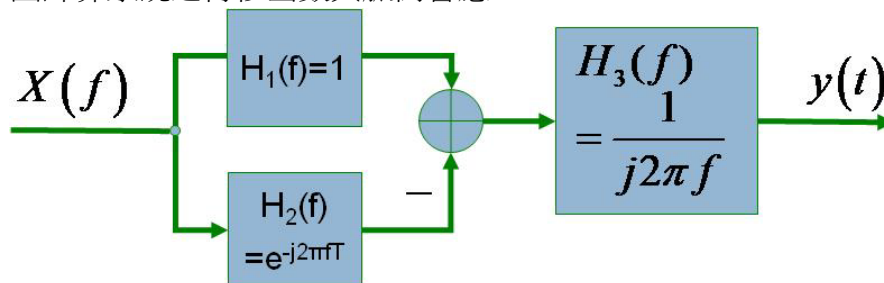
| | | |
|------|--|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失 增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 常見系統功能 、 並聯 、 串接 、 迴授 、 範例：Zero-order hold(時域) | |

- 圖為 Zero-order hold 之系統方塊圖，應用於類比與數位系統間訊號之轉換。與設定取樣率。其中 T 為訊號取樣週期時間。



範例：Zero-order hold(頻域、轉移函數)

- 圖計算系統之轉移函數與脈衝響應。



解：Zero-order hold

- 由方塊圖之架構可得

$$H(f) = H_1(f)H_3(f) = [H_1(f) + H_2(f)]H_3(f)$$

- 頻域應用每一系統方塊之基本定義

$$[1 - e^{-j2\pi f T}] \frac{1}{j2\pi f} = \frac{e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}}{j2\pi f} e^{-j\pi f T} = \frac{\sin \pi f T}{\pi f} e^{-j\pi f T} = T \sin \pi f T e^{-j\pi f T}$$

- 時域得

$$h(t) = \int_{-\infty}^t [\delta(\lambda) - \delta(\lambda - T)] d\lambda = u(t) - u(t - T)$$

- 脈衝響應為

$$h(t) = \text{rect}[(t - T/2)/T]$$

- 富氏轉換後得轉移函，

$$h(t) \leftrightarrow H(f)$$

第四節 傳輸中之訊號失真(Signal Distortion in Transmission)

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 無失真傳輸 、 線性失真 、 固定相位移 、 等化器概念 、 等化器 、 多重路徑失真之等化器 、 非線性失真 、 抑制器 | |

- 訊號傳輸系統是由一電子通道(channel)將訊號由一資訊源傳至目的地。
- 傳輸過程會有失真與干擾，首先我們簡單一些失真與非失真之傳輸情形
 - 無失真傳輸(Distortionless Transmission)
 - 線性失真(Linear distortion)
 - 多重路徑失真(Multipath distortion)
 - 非線性失真(Nonlinear distortion)

一、無失真傳輸(Distortionless Transmission)

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 無失真傳輸 、 線性失真 、 固定相位移 、 等化器概念 、 等化器 、 多重路徑失真之等化器 、 非線性失真 、 抑制器 | |

- 若接收訊號與原始訊號只有大小不同與時間延遲，稱無失真傳輸。

$$y(t) = Kx(t - t_d)$$

- 頻譜

$$Y(f) = \mathcal{F}[y(t)] = Ke^{-j\omega t_d} X(f)$$

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

- 所以轉移函數

$$H(f) = Ke^{-j\omega t_d}$$

- 轉移函數
 - 無失真傳輸

$$|H(f)| = |K|$$

$$\arg H(f) = -2\pi f t_d \pm m180^\circ$$
 - 振幅失真傳輸

$$|H(f)| \neq |K|$$
 - 延遲失真傳輸

$$\arg H(f) \neq -2\pi f t_d \pm m180^\circ$$

二、線性失真(Linear distortion)

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 無失真傳輸 、 線性失真 、 固定相位移 、 等化器概念 、 等化器 、 多重路徑失真之等化器 、 非線性失真 、 抑制器 | |

- 當每一訊號分量之時間延遲與訊號成線性關係則稱線性失真。

$$\arg H(f) = -2\pi f t_d(f)$$

$$t_d(f) = -\frac{\arg H(f)}{2\pi f}$$

- 例：固定相位移

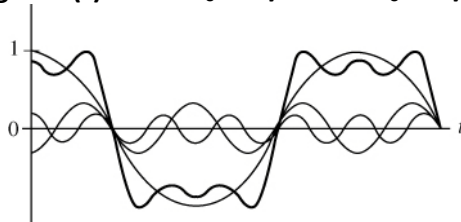
$$H(f) = A e^{j(-2\pi f t_g + \phi_0)} = (A e^{j\phi_0}) e^{-j2\pi f t_g}$$

$$\arg H(f) = -2\pi f t_g + \phi_0$$

$$t_d(f) = t_g - \phi_0 / 2\pi f$$

- t_g ：稱群延遲(group delay)
- t_d ：稱相延遲(phase delay)

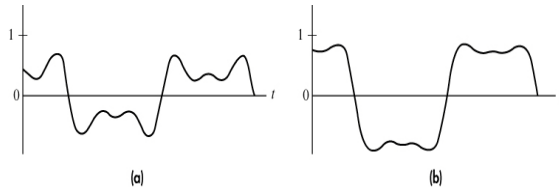
- Test signal $x(t) = \cos \omega_0 t + 1/3 \cos 3\omega_0 t + 1/5 \cos 5\omega_0 t$



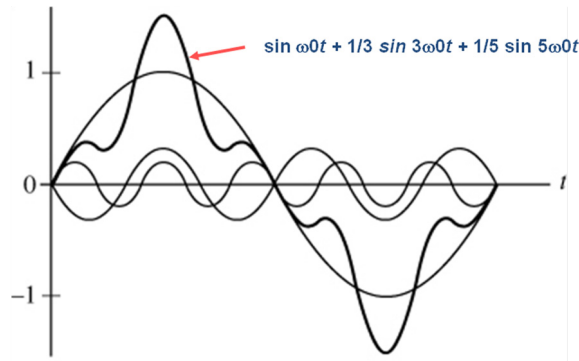
- Test signal with amplitude distortion (a) low frequency attenuated; (b) high frequency attenuated

a) (變小) $\cos \omega_0 t + 1/3 \cos 3\omega_0 t + 1/5 \cos 5\omega_0 t$

b) $\cos \omega_0 t + 1/3 \cos 3\omega_0 t +$ (變小) $\cos 5\omega_0 t$



- Test signal with constant phase shift $\theta = -90^\circ$



三、固定相位移：線性失真(Linear distortion)

| | | |
|------|--|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失 、 增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 無失真傳輸 、 線性失真 、 固定相位移 、 等化器概念 、 等化器 、 多重路徑失真之等化器 、 非線性失真 、 抑制器 | |

- 假設訊號

$$x(t) = x_1(t) \cos \omega_c t - x_2(t) \sin \omega_c t$$

- 經由固定相位移(ψ)通道

$$y(t) = A_{x1}(t - t_g) \cos[\omega_c(t - t_d)] - A_{x2}(t - t_g) \sin[\omega_c(t - t_d)]$$

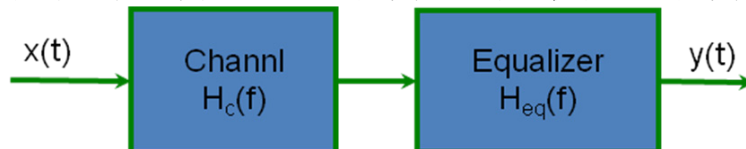
$$y(t) = A_{x1}(t - t_g) \cos[\omega_c(t - t_g) + \phi_0] - A_{x2}(t - t_g) \sin[\omega_c(t - t_g) + \phi_0]$$

$$t_g = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(f)}{df}$$

四、等化器(Equalization)概念

| | | |
|------|--|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失 、 增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 無失真傳輸 、 線性失真 、 固定相位移 、 等化器概念 、 等化器 、 多重路徑失真之等化器 、 非線性失真 、 抑制器 | |

- 設計一系統來補償通道之失真現象，使接收無失真!!!



- 期望整體之系統轉移函數

$$H_c(f)H_{eq}(f) = Ke^{-j\omega t_d}$$

五、等化器(Equalization)

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失 | 目錄 |
|------|---|--------------------|

| | |
|------|---|
| | 增益與分貝、濾波器與濾波、正交濾波器、相關函數與頻譜密度 |
| 相關資料 | 無失真傳輸、線性失真、固定相位移、等化器概念、等化器、多重路徑失真之等化器、非線性失真、抑制器 |

□ 整體之系統轉移函數

$$H_C(f)H_{eq}(f) = Ke^{-j\omega\Delta}$$

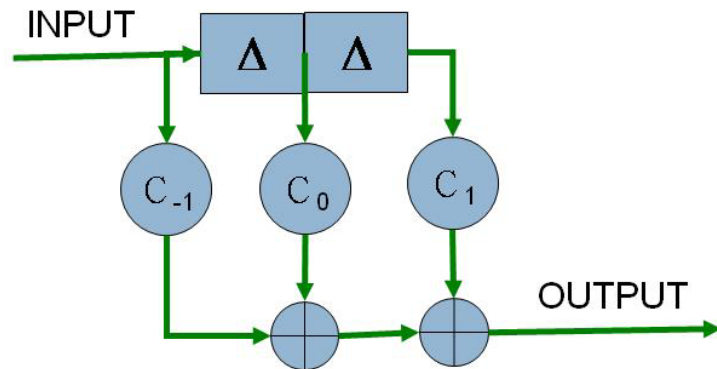
□ 所以

$$H_{eq}(f) = \frac{Ke^{-j\omega\Delta}}{H_C(f)}$$

□ 常見設計等化器之方法為使用

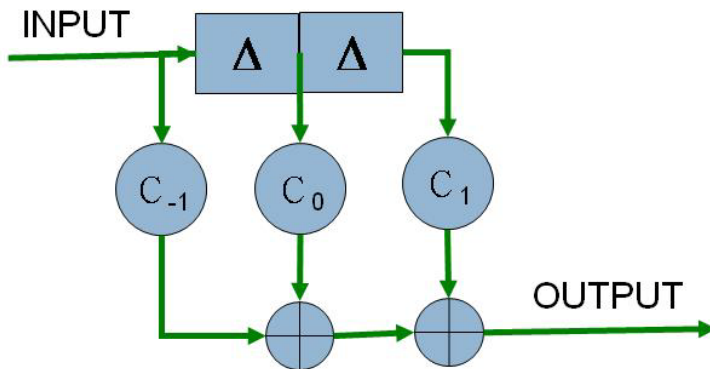
- ▣ Tapped-delay-line
- ▣ 或 transversal filter

□ 如：



□ Tapped-delay-line equalizer 或 transversal filter

□ 直接由下圖可寫



$$y(t) = c_{-1}x(t) + c_0x(t - \Delta) + c_1x(t - 2\Delta)$$

□ 轉移函數

$$H_{eq}(f) = c_{-1} + c_0e^{-j\omega\Delta} + c_1e^{-j\omega 2\Delta} = (c_{-1}e^{+j\omega\Delta} + c_0 + c_1e^{-j\omega\Delta})e^{-j\omega\Delta}$$

□ 整理後，若有 $2M+1$ 個係數

$$H_{eq}(f) = \left(\sum_{m=-M}^M c_m e^{-j\omega m \Delta} \right) e^{-j\omega M \Delta}$$

六、多重路徑失真之等化器

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 無失真傳輸 、 線性失真 、 固定相位移 、 等化器概念 、 等化器 、 多重路徑失真之等化器 、 非線性失真 、 抑制器 | |

- 假設有一失真通道（兩多重路徑）

$$y(t) = k_1 x(t-t_1) + k_2 x(t-t_2)$$

- 求等化器？

- 通道轉移函數

$$H_c(f) = k_1 e^{-j\omega t_1} + k_2 e^{-j\omega t_2} = k_1 e^{-j\omega t_1} (1 + k e^{-j\omega t_0})$$

$$k = k_2 / k_1, t_0 = t_2 - t_1$$

- 等化器轉移函數

$$H_{eq}(f) = \frac{1}{(1 + k e^{-j\omega t_0})}$$

多重路徑失真(以 TAPPED-DELAY 設計)

$$y(t) = K_1 x(t-t_1) + K_2 x(t-t_2)$$

$$H_c(f) = K_1 e^{-j\omega t_1} + K_2 e^{-j\omega t_2} = K_1 e^{-j\omega t_1} (1 + k e^{-j\omega t_0})$$

- 等化器之轉移函數為

$$H_{eq}(f) = \frac{1}{1 + k e^{-j\omega t_0}}$$

- 以泰勒展開近似為

$$H_{eq}(f) = 1 - k e^{-j\omega t_0} + k^2 e^{-j2\omega t_0} + \dots$$

- 取三項

$$H_{eq}(f) \approx (e^{+j\omega t_0} - k + k^2 e^{-j2\omega t_0}) e^{-j\omega t_0}$$

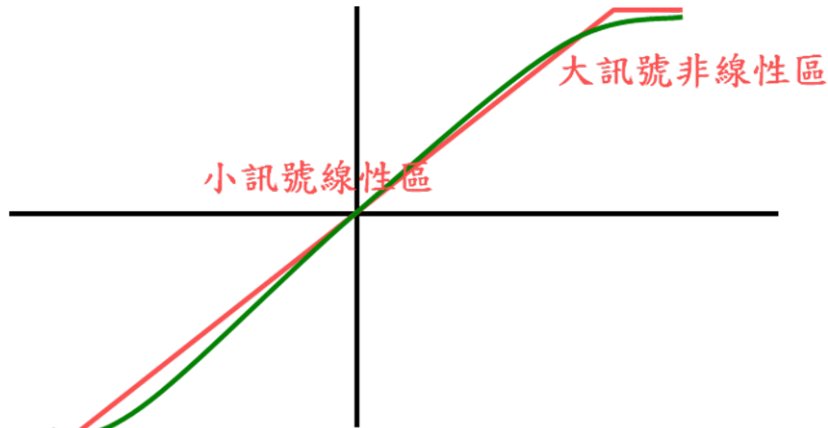
- TAPPED-DELAY 設計

$$\text{令 } C_{-1} = 1, C_0 = -k, C_1 = k^2, \Delta = t_0$$

七、非線性失真

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 無失真傳輸 、 線性失真 、 固定相位移 、 等化器概念 、 等化器 、 多重路徑失真之等化器 、 非線性失真 、 抑制器 | |

- 如圖為非線性系統



- 如：

$$y(t) = a_1x(t) + a_2x^2(t) + a_3x^3(t) + \dots$$

$$Y(f) = a_1X(f) + a_2X * X(f) + a_3X * X * X(f) + \dots$$

- 假設輸入

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)$$

- 系統輸出

$$y(t) = \left(\frac{a_2}{2} + \frac{3a_4}{8} + \dots \right) + \left(a_1 + \frac{3a_3}{4} + \dots \right) \cos \omega_0 t + \left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_4}{4} + \dots \right) \cos 2\omega_0 t + \dots$$

- 產生多次諧波失真，下為二次諧波失真量

$$\frac{\left| \frac{a_2}{2} + \frac{a_4}{4} + \dots \right|}{\left| a_1 + \frac{3a_3}{4} + \dots \right|} \times 100\%$$

八、抑制器 companding (compressing & expanding)

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 無失真傳輸 、 線性失真 、 固定相位移 、 等化器概念 、 等化器 、 多重路徑失真之等化器 、 非線性失真 、 抑制器 | |

□ 如何避免系統非線性元件對調變之影響？

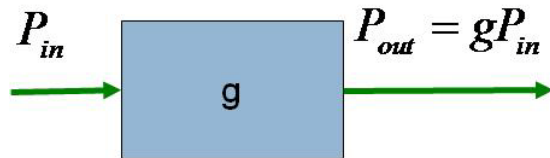
- 盡量使訊號落於線性區，因此早期電信系統常使用抑制器 (companding) 避免因乘積元件 (crossproduct) 之非線性現象，造成系統串音現象 (cross talk)。



- compressor：先將大訊號抑制(衰減)
- expander：將大訊號還原(放大)
- compressing 與 expanding 合稱抑制器 companding

第五節 傳輸損失、增益與分貝(dB)(Transmission Loss、GAIN and Decibels)

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 系統功率增益 、 傳輸損失與中繼器 、 光纖 、 射頻傳輸 、 直視傳輸 、 範例：衛星中繼系統 | |



- 傳輸損失或增益定義

$$g = P_{out} / P_{in}$$

- 以分貝(dB)定義

$$g_{dB} = 10 \log_{10} g$$

$$g = 10^{(g_{dB}/10)}$$

dBW & dBm

- 若將輸入功率以固定功率，則可定義為功率量測單位

- dBW：以一瓦 w 為比較單位，

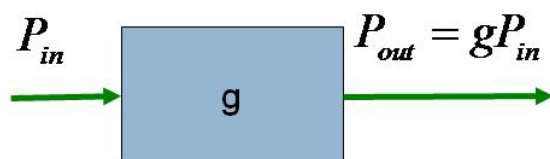
$$P_{dBW} = 10 \log_{10} \frac{P}{1W}$$

- dBm：以一微瓦 mw 為比較單位

$$P_{dBm} = 10 \log_{10} \frac{P}{1mW}$$

一、系統功率增益(Power gain)

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 系統功率增益 、 傳輸損失與中繼器 、 光纖 、 射頻傳輸 、 直視傳輸 、 範例：衛星中繼系統 | |



- 以 dB 表示系統增益與訊號功率得

$$P_{out,dBm} = g_{dB} + P_{in,dBm}$$

- 系統增益與系統轉移函數之關係

$$g = |H(f)|^2 = K^2$$

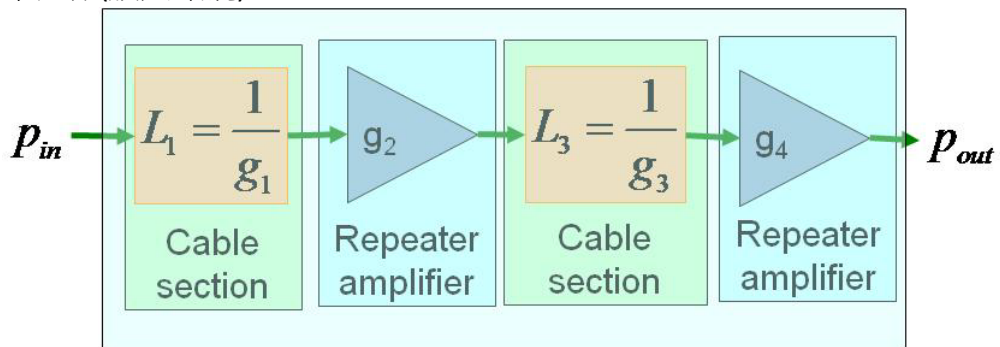
- dB 表示系統轉移函數

$$|H(f)|_{dB} \stackrel{\Delta}{=} 10 \log_{10} |H(f)|^2$$

二、傳輸損失與中繼器

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標、線性非時變系統、方塊圖分析、傳輸中訊號失真、傳輸損失增益與分貝、濾波器與濾波、正交濾波器、相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 系統功率增益、傳輸損失與中繼器、光纖、射頻傳輸、直視傳輸、範例：衛星中繼系統 | |

- 傳輸損失，在通訊系統中是設計中繼器來克服，在一段傳輸距離後設置一中繼器(放大訊號)



$$L = 1/g = P_{in} / P_{out}$$

$$L_{dB} = -g_{dB} = 10 \log_{10} P_{in} / P_{out}$$

$$P_{out} = 10^{-(\alpha \ell / 10)} P_{in}$$

$$L = 10^{(\alpha \ell / 10)} \quad L_{dB} = \alpha \ell$$

- 則最後收到之訊號功率為(假設 g_2 與 g_4 是為中繼器)

$$P_{out} = (g_1 g_2 g_3 g_4) P_{in} = \frac{g_2 g_4}{L_1 L_3} P_{in}$$

$$P_{out} = (g_2 + g_4) - (L_1 + L_3) + P_{in}$$

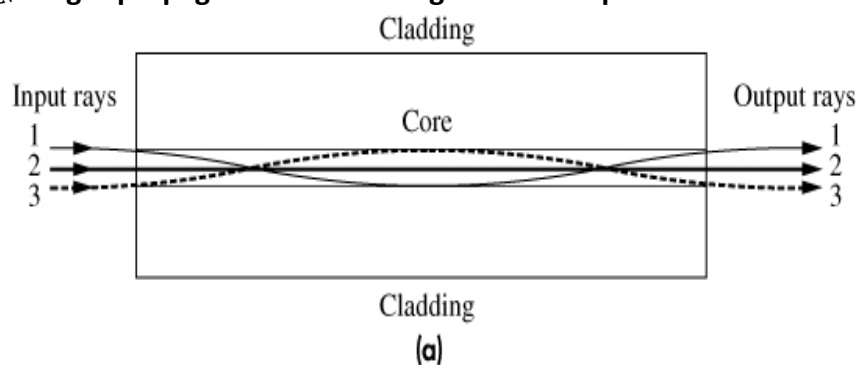
- 常見傳輸損耗

| 傳輸介質 | 頻帶 | Loss dB/km |
|----------------|-------------------------|------------|
| 雙絞線(16gauge) | 10kHz | 2 |
| | 100KHz | 3 |
| | 300KHz | 1 |
| 同軸電纜(直徑1cm) | 100KHz | 1 |
| | 1MHz | 2 |
| | 3MHz | 4 |
| 同軸電纜(直徑15cm) | 100MHz | 1.5 |
| 方形波導管(5*2.5cm) | 10GHz | 5 |
| 光纖 | 3.6×10^{14} Hz | 2.5 |
| | 1.4×10^{14} Hz | 0.5 |
| | 1.8×10^{14} Hz | 0.2 |

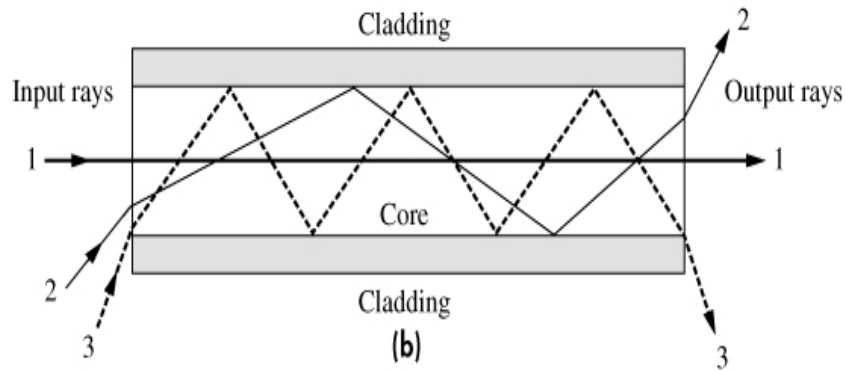
三、光纖(Fiber Optics)

| | | |
|------|--|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失 、 增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 系統功率增益 、 傳輸損失與中繼器 、 光纖 、 射頻傳輸 、 直視傳輸 、 範例：衛星中繼系統 | |

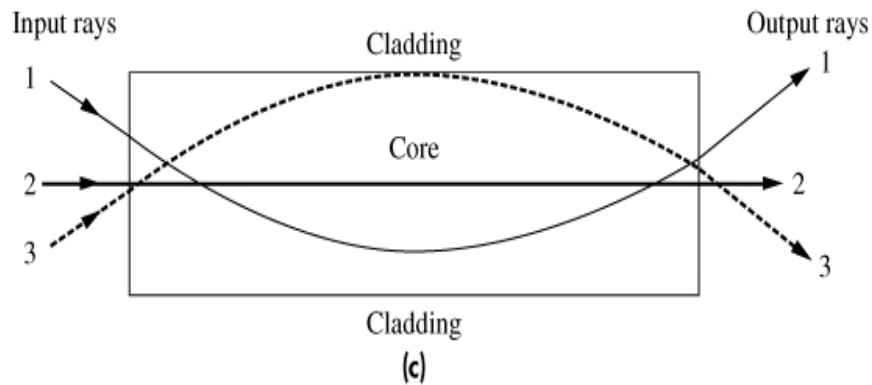
- 光纖通訊是以光波為傳輸媒介。
 - ▣ 光在介質內全反射現象，將訊號由 A 傳遞至 B。
 - ▣ 大部份光通訊系統為數位通訊系統，因為類比之光訊號調變與解調變不易。
 - ▣ 數位則可透由光之 on-off 調變。
- 光之媒介 → 光纖，傳輸型態有
 - ▣ 單模態(single-mode)
 - ▣ 多模態(multi-mode, step-index)
 - ▣ 多模態(multi-mode, graded-index)
- 單模態，**Light propagation down a single-mode step-index fiber**



- 多模態，**Light propagation down a multimode step-index fiber**

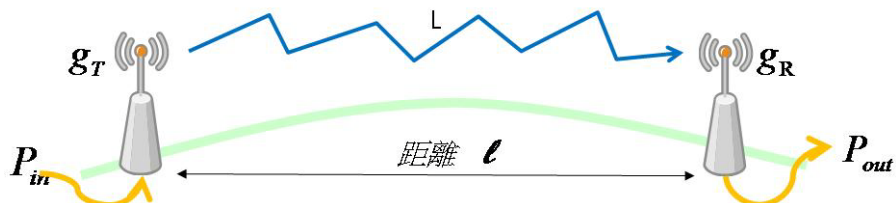


□ 多模態， **Light propagation down a multimode graded-index fiber**



四、射頻傳輸

| | | |
|------|---|----|
| 相關單元 | 學習目標、線性非時變系統、方塊圖分析、傳輸中訊號失真、傳輸損失增益與分貝、濾波器與濾波、正交濾波器、相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 系統功率增益、傳輸損失與中繼器、光纖、射頻傳輸、直視傳輸、範例：衛星中繼系統 | |



- 直視傳輸(line-of-sight propagation) ，一般在頻帶 100MH 以上之電磁波頻帶。
- 自由空間損耗(free-space-loss) ：以球面輻射之損耗

$$L = \left(\frac{4\pi\ell}{\lambda} \right)^2 = \left(\frac{4\pi f\ell}{c} \right)^2$$

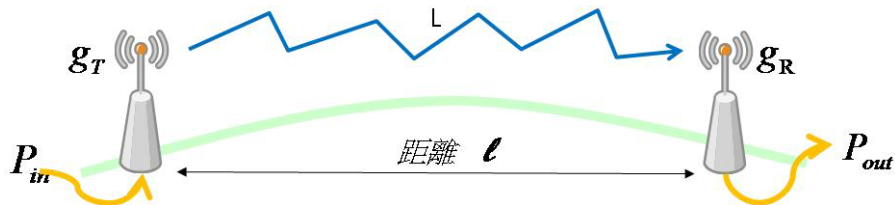
- 其中
 ℓ : 傳輸距離
 c : 電磁波波速

五、直視傳輸(line-of-sight propagation)

| | | |
|------|---|----|
| 相關單元 | 學習目標、線性非時變系統、方塊圖分析、傳輸中訊號失真、傳輸損失增益與分貝、濾波器與濾波、正交濾波器、相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 系統功率增益、傳輸損失與中繼器、光纖、射頻傳輸、直視傳輸、範例：衛星中繼系統 | |

- 一般直視傳輸之損耗

$$L_{dB} = 92.4 + 20 \log_{10} f_{GHz} + 20 \log_{10} \ell_{km}$$

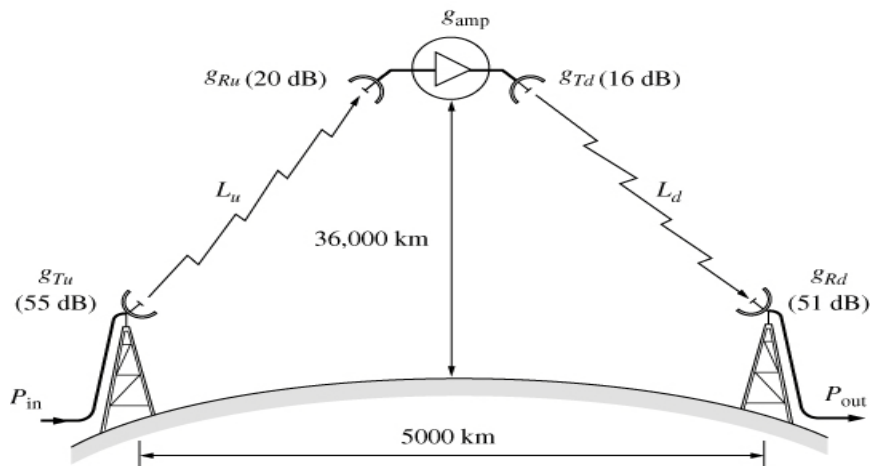


$$P_{out} = \frac{g_T g_R}{L} P_{in}$$

$$g = \left(\frac{4\pi A_e}{\lambda^2} \right) = \left(\frac{4\pi A_e f^2}{c^2} \right)$$

六、範例：衛星中繼系統(Satellite relay system)

| | | |
|------|---|----|
| 相關單元 | 學習目標、線性非時變系統、方塊圖分析、傳輸中訊號失真、傳輸損失增益與分貝、濾波器與濾波、正交濾波器、相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 系統功率增益、傳輸損失與中繼器、光纖、射頻傳輸、直視傳輸、範例：衛星中繼系統 | |



- Uplink frequency=6GHz、Downlink freq.=4GHz, 中繼輸出=18dBw

- 假設傳輸損耗為

$$L_{dB} = 92.4 + 20 \log_{10} f_{GHz} + 20 \log_{10} \ell_{km}$$

- 輸入功率 35dBW

- 求輸出功率

解：衛星中繼系統，

- 應用

$$L_{dB} = 92.4 + 20 \log_{10} f_{GHz} + 20 \log_{10} \ell_{km}$$

- ▣ 求得 uplink loss

$$L_u = 92.4 + 20 \log_{10} 6 + 20 \log_{10} 3.6 \times 10^4 = 199.1dB$$

- ▣ Downlink loss

$$L_d = 92.4 + 20 \log_{10} 4 + 20 \log_{10} 3.6 \times 10^4 = 195.6dB$$

- ▣ 中繼器輸入 $35dB + 55dB - 199.1dB + 20dB = -144.1dBW$

- ▣ 輸出功率 $18dB + 16dB - 195.6dB + 51dB = -110.6dBW$

$$P_{out} = 10^{(-100.6/10)} \times 1W = 8.7 \times 10^{-12}W$$

第六節 濾波器與濾波(Filter and Filtering)

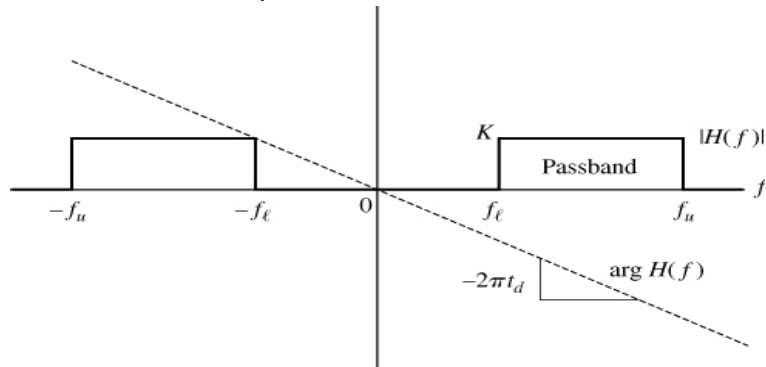
| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 理想帶通濾波 、 理想濾波器 、 有限頻寬與有限時間 、 典型帶通濾波器 、 實際濾波器 、 濾波器設計方法 、 脈波響應與上升時間 、 Response of an LPF | |

- 通訊系統存在許多濾波器。為了將所承載之資訊由不想要之內容中取出。如：
 - 干擾：一般指由非訊號本身之其他來源，因訊號之混合造成接收訊號之損失。
 - 雜訊：雜訊可能是熱雜訊或其他背景雜訊，因加至訊號上導致訊號之解析能力變差。
 - 失真：由訊號本身，被各種線性或非線性之系統響應(或通道)，造成接收訊號之變異與損失。
- 濾波則是應用各種訊號處理方式移除上述干擾與雜訊。

一、Transfer function of a ideal bandpass filter

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 理想帶通濾波 、 理想濾波器 、 有限頻寬與有限時間 、 典型帶通濾波器 、 實際濾波器 、 濾波器設計方法 、 脈波響應與上升時間 、 Response of an LPF | |

- Ideal filter：指的是處理頻帶內訊號無失真(distortionless)，在其他頻帶內則為 0。
- 下圖為 ideal bandpass filter。



二、理想濾波器(ideal filter)

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 理想帶通濾波 、 理想濾波器 、 有限頻寬與有限時間 、 典型帶通濾波器 、 實際濾波器 、 濾波器設計方法 、 脈波響應與上升時間 、 Response of an LPF | |

- 可以分為
 - Lowpass filter：如下式

$$H(f) = Ke^{-j\omega t_d} \prod\left(\frac{f}{2B}\right)$$

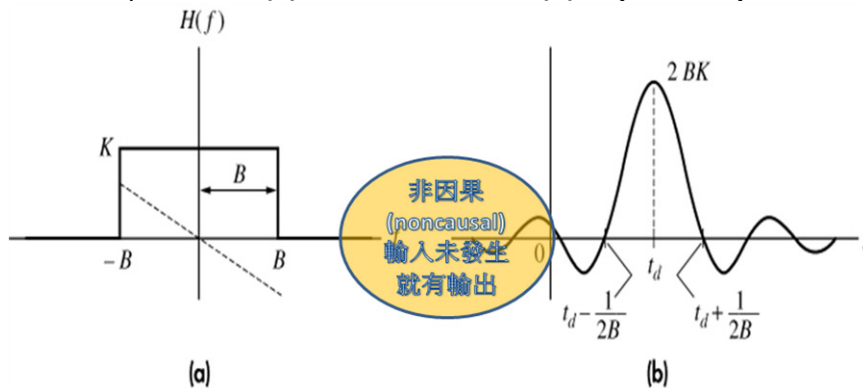
$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(f)] = 2BK \sin 2B(t - t_d)$$

- Highpass filter
- Band-rejection filter
- Band-pass filter：下列表示為帶通之轉移函數與響應

$$H(f) = \begin{cases} Ke^{-j\omega t_d} & f_\ell \leq |f| \leq f_u \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 其中，B 稱頻帶寬 $B = f_u - f_\ell$ 。

- Ideal lowpass filter (a) Transfer function (b) Impulse response



$$(a) H(f) = Ke^{-j\omega t_d} \prod\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$(b) h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(f)] = 2BK \sin 2B(t - t_d)$$

三、有限頻寬與有限時間(Bandlimiting and Timelimiting)

| | | |
|------|---|----|
| 相關單元 | 學習目標、線性非時變系統、方塊圖分析、傳輸中訊號失真、傳輸損失增益與分貝、濾波器與濾波、正交濾波器、相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 理想帶通濾波、理想濾波器、有限頻寬與有限時間、典型帶通濾波器、實際濾波器、濾波器設計方法、脈波響應與上升時間、Response of an LPE | |

- 若有一訊號之頻譜為

$$V(f) = 0 \quad |f| > W$$

- 稱有限頻寬訊號

- 若有一訊號之時域為

$$v(t) = 0 \quad t < t_1 \text{ and } t > t_2$$

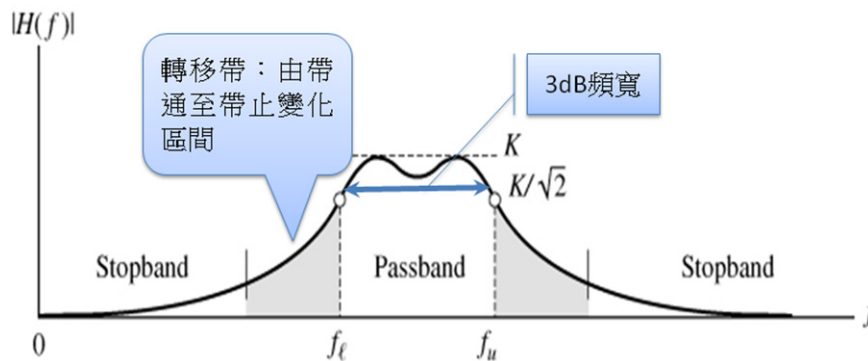
- 稱有限時間訊號

- 完美之有限頻寬與有限時間訊號，皆不可能存在。
 - ▣ 因為完美時間有限會造成無限之頻寬需求。
 - ▣ 完美頻寬有限會造成無限之時間延展需求。

四、典型帶通濾波器 (Typical amplitude ratio of a real bandpass filter)

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 理想帶通濾波 、 理想濾波器 、 有限頻寬與有限時間 、 典型帶通濾波器 、 實際濾波器 、 濾波器設計方法 、 脈波響應與上升時間 、 Response of an LPF | |

- Passband：帶通帶，一般為放大倍，可能有漣漪(ripple)，由最大放大倍率 K 至 $1/2K$ 之範圍稱 3dB 頻寬。如圖 f_H - f_L 。
- Stopband：帶止帶，輸出為 0。



五、實際濾波器 (real filter)

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 理想帶通濾波 、 理想濾波器 、 有限頻寬與有限時間 、 典型帶通濾波器 、 實際濾波器 、 濾波器設計方法 、 脈波響應與上升時間 、 Response of an LPF | |

- 由上圖可簡單假設濾波器轉移函數為

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |H(f)|_{\max} = \frac{K}{\sqrt{2}} \quad f = f_l, f_u$$

- 應用 Butterworth filter 設計技術

$$|H(f)| = \frac{1}{P_n(jf/B)}$$

- ▣ 其中 $|P_n(jfB)|^2 = 1 + (f/B)^{2n}$

- ▣ n 為所使用之濾波器階數，代入後可得轉移函數

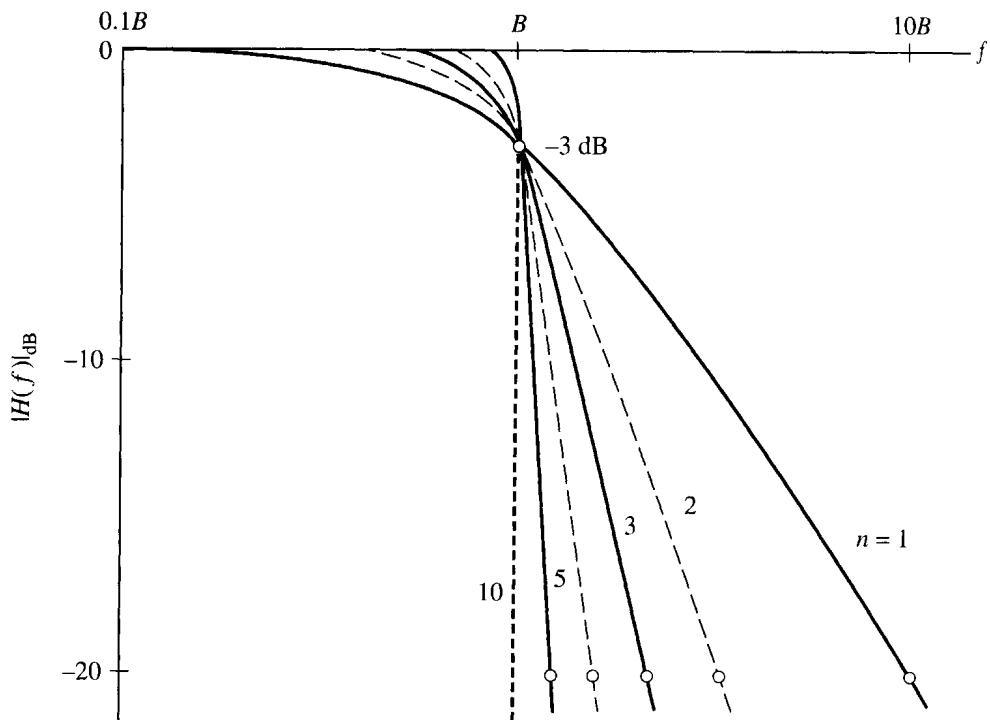
$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+(f/B)^{2n}}}$$

六、常見濾波器設計方法

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失 增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 理想帶通濾波 、 理想濾波器 、 有限頻寬與有限時間 、 典型帶通濾波器 、 實際濾波器 、 濾波器設計方法 、 脈波響應與上升時間 、 Response of an LPF | |

- Butterworth：有平坦之帶通帶。
- Bessel、maximally linear phase：有最好之帶通帶線性相位。
- Equal ripple filter：有較小之轉移帶。分
 - Chebyshev filter(I、II)
 - Elliptic filter
- Butterworth、Bessel、maximally linear phase、Equal ripple filter(Chebyshev filter(I、II)、Elliptic filter)
 - 可以應用 MATLAB toolbox，了解上述濾波器功能差異。
- 所有濾波器設計時，
 - 一般使用主動式(active)設計，
 - 並為避免使用電感(空間與重量)會使用 switched-capacitor filter 技術。

Bode diagram for Butterworth LPF



七、脈波響應與上升時間

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 理想帶通濾波 、 理想濾波器 、 有限頻寬與有限時間 、 典型帶通濾波器 、 實際濾波器 、 濾波器設計方法 、 脈波響應與上升時間 、 Response of an LPF | |

- 步階響應

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) u(t - \ell) d\lambda = \int_{-\infty}^t h(\lambda) d\lambda$$

- 一階濾波器之輸出響應

$$g(t) = (1 - e^{-2\pi Bt}) u(t)$$

- 理想低通之輸出響應

$$g(t) = \int_{-\infty}^t 2B \sin c 2B\lambda d\lambda = \int_{-\infty}^0 \sin c \mu d\mu + \int_0^{2Bt} \sin c \mu d\mu$$

- 定義

$$Si(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha = \int_0^{2Bt} \sin c \mu d\mu$$

- 則理想低通之輸出響應

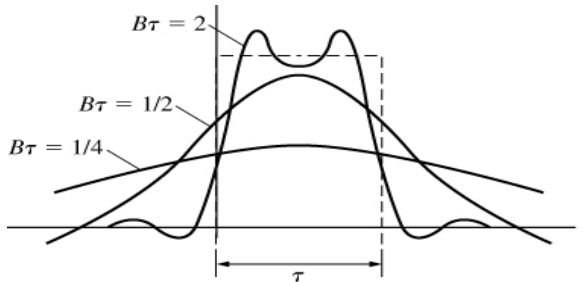
$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si(2\pi Bt)$$

八、Response of an LPF

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 理想帶通濾波 、 理想濾波器 、 有限頻寬與有限時間 、 典型帶通濾波器 、 實際濾波器 、 濾波器設計方法 、 脈波響應與上升時間 、 Response of an LPF | |

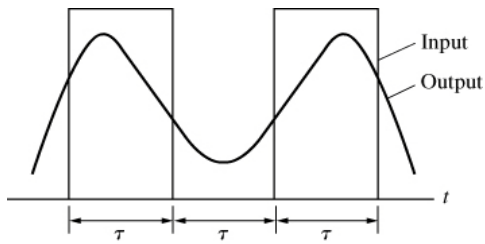
Pulse response of an ideal LPF

- 當方波脈衝通過濾波器時，方波脈衝失真情形與濾波器頻帶寬有關。 $B\tau > 2$ 可通過基本形狀， $B\tau \ll 2$ 會造成延重失真。



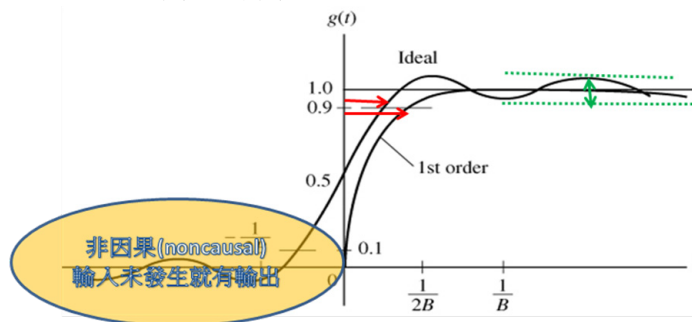
Pulse resolution of an ideal LPF. $B = \frac{1}{2}\tau$

- $B\tau > 2$ 通過基本形狀， $B\tau \ll 2$ 造成失真。
- 因此濾波器最大之解析率定為 $B = \frac{1}{2}\tau$ 、 $\tau = 2B$



步階響應分析(Step response of ideal and first-order LPFs)

- 請注意理想、一階濾波器之響應。
 - ▣ Setup time：當輸出至 0.9(穩態值)時之時間。
 - ▣ Ripple：穩態值之漣漪量。
 - ▣ Causal：未輸入時輸出為 0。



第七節 正交濾波器與希伯特轉換(Quadrature Filters and Hilbert Transforms)

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失 增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 希伯特轉換性質 、 範例a cosine Signal 、 範例a Rectangular Signal | |

- 正交濾波器(Quadrature Filters)：全通濾波器，只正頻率分量相位移-90度、負頻率分量相位移 90 度

- 轉移函數

$$H_Q(f) = -j \operatorname{sgn} f = \begin{cases} -j & f > 0 \\ +j & f < 0 \end{cases}$$

- 脈衝響應 $h_Q(t) = \frac{1}{\pi t}$

- 希伯特轉換(Hilbert Transforms)：任何訊號通過正交濾波器，稱之。

$$\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\lambda)}{t - \lambda} d\lambda$$

$$\mathcal{F}[\hat{x}(t)] = (-j \operatorname{sgn} f)X(f)$$

一、希伯特轉換性質(Property of Hilbert Transforms)

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失 增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 希伯特轉換性質 、 範例a cosine Signal 、 範例a Rectangular Signal | |

- 任何訊號之希伯特轉換後之振幅頻譜與其原振幅頻譜相同。
- 若

$\hat{x}(t)$ 是 $x(t)$ 之Hilbert轉換，則

$\hat{\hat{x}}(t)$ 也是 $-x(t)$ 之Hilbert轉換

- 任何訊號訊號與希伯特轉換之訊號為正交

$\hat{x}(t)$ 是 $x(t)$ 之Hilbert轉換，則

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\hat{x}(t)dt = 0, \text{ 所有能量訊號}$$

二、範例 Hilbert transform of a cosine Signal

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失 增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 希伯特轉換性質 、 範例a cosine Signal 、 範例a Rectangular Signal | |

- 訊號 $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$
 - 求 Hilbert transform ?
- ANS :

$$\begin{aligned}\hat{X}(f) &= -j \operatorname{sgn} f X(f) = \frac{-jA}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \operatorname{sgn} f \\ &= \frac{A}{2j} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]\end{aligned}$$

□ IFT $\rightarrow \hat{x}(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi)$

三、範例: Hilbert transform of a Rectangular Signal

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失 增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 希伯特轉換性質 、 範例a cosine Signal 、 範例a Rectangular Signal | |

□ 訊號 $\hat{x}(t) = \frac{A}{\pi} \int_0^\tau \frac{1}{t-\lambda} d\lambda$

- 求 Hilbert transform ?

□ ANS :

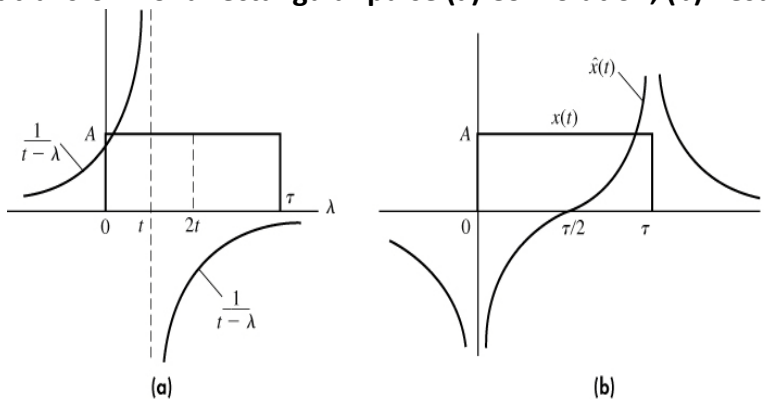
$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= \frac{A}{\pi} \int_0^\tau \frac{1}{t-\lambda} d\lambda = \frac{A}{\pi} [\ln(-t) - \ln(t-\tau)] \\ &= \frac{A}{\pi} \ln\left(\frac{-t}{t-\tau}\right) = \frac{A}{\pi} \ln\left(\frac{1}{\tau-t}\right)\end{aligned}$$

- IFT \rightarrow

$$\hat{x}(t) = \frac{A}{\pi} \int_0^\tau \frac{1}{t-\lambda} d\lambda = \frac{A}{\pi} \ln\left(\frac{t}{\tau-t}\right)$$

$$\hat{x}(t) = \frac{A}{\pi} \ln\left|\frac{t}{t-\tau}\right|$$

Hilbert transform of a rectangular pulse (a) Convolution; (b) Result



第八節 相關函數與頻譜密度(Correlation and Spectral Density)

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 功率訊號之相關性 、 能量訊號之相關性 、 頻譜密度函數 、 範例：Comb Filter(梳型濾波器) | |

- 相關函數與頻譜密度是分析訊號與系統之另一常用之方法。
- 相關函數(Correlation)做 Fourier transform，得到頻域表示法 → 頻譜密度(Spectral Density)。可以用於分析訊號之功率。
- 頻譜密度(Spectral Density)是可應用於各種訊號之分析，即使訊號為無法 Fourier transform，例如：隨機訊號。

一、功率訊號之相關性(Correlation of power Signals)

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 功率訊號之相關性 、 能量訊號之相關性 、 頻譜密度函數 、 範例：Comb Filter(梳型濾波器) | |

- 假設 $v(t)$ 為功率訊號，則其平均功率(average power)

$$P_v \triangleq \langle |v(t)|^2 \rangle = \langle v(t)v^*(t) \rangle \geq 0$$

- 時間平均定義為

$$\langle z(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} z(t) dt$$

- 有下列性質

$$\langle z^*(t) \rangle = \langle z(t) \rangle^*$$

$$\langle z(t - t_d) \rangle = \langle z(t) \rangle \quad \text{any } t_d$$

$$\langle a_1 z_1(t) + a_2 z_2(t) \rangle = \langle a_1 z_1(t) \rangle + \langle a_2 z_2(t) \rangle$$

- $\langle v(t)w^*(t) \rangle$ 稱純量乘(scalar product)

Schwarz's inequality

$$\left| \langle v(t)w^*(t) \rangle \right|^2 \leq P_v P_w$$

- 證：假設 $z(t) = v(t) - aw(t)$

$$\begin{aligned} P_z &= \langle z(t)z^*(t) \rangle = \langle [v(t) - aw(t)][v^*(t) - a^*w^*(t)] \rangle \\ &= \langle v(t)v^*(t) \rangle + aa^* \langle w(t)w^*(t) \rangle - a^* \langle v(t)w^*(t) \rangle - a \langle v^*(t)w(t) \rangle \\ &= P_v + aa^* P_w - 2 \operatorname{Re} [a^* \langle v(t)w^*(t) \rangle] \end{aligned}$$

□ 令

$$a = \langle v(t)w^*(t) \rangle / P_w$$

$$P_z = P_v - \left| \langle v(t)w^*(t) \rangle \right|^2 / P_w \geq 0$$

□ 得證 $\left| \langle v(t)w^*(t) \rangle \right|^2 \leq P_v P_w$

□ 互相關函數(crosscorrelation)

$$P_{vw}(\tau) \stackrel{\Delta}{=} \langle v(t)w^*(t-\tau) \rangle = \langle v(t+\tau)w^*(t) \rangle$$

□ 互相關量小於個別訊號功率

$$\left| R_{vw}(\tau) \right|^2 \leq P_v P_w$$

□ 兩訊號之互相關與方向無關

$$R_{vw}(\tau) = R_{vw}^*(-\tau)$$

□ 自相關函數(autocorrelation)

$$R_v(\tau) \stackrel{\Delta}{=} R_{vv}(\tau) = \langle v(t)v^*(t-\tau) \rangle = \langle v(t+\tau)v^*(t) \rangle$$

□ $t=0$ 自相關，等於平均功率

$$R_v(0) = P_v$$

□ $t=0$ 自相關，為最大

$$\left| R_v(\tau) \right| \leq R_v(0)$$

□ 自相關與方向無關

$$R_v(-\tau) = R_v^*(\tau)$$

□ 假設 $z(t) = v(t) \pm w(t)$

□ 自相關為

$$R_z(\tau) = R_v(\tau) + R_w(\tau) \pm [R_{vw}(\tau) + R_{wv}(\tau)]$$

□ 若互相關函數，無關

$$R_{vw}(\tau) = R_{wv}(\tau) = 0$$

□ 則訊號功率關係如下：

$$P_z = P_v + P_w$$

範例：Correlation of phasors and sinusoids

□ 定義

$$\langle e^{j\omega_1 t} e^{-j\omega_2 t} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j(\omega_1 - \omega_2)t} dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \sin c \frac{(\omega_1 - \omega_2)T}{2\pi} = \begin{cases} 0 & \omega_2 \neq \omega_1 \\ 1 & \omega_2 = \omega_1 \end{cases}$$

□ 令 $v(t) = C_v e^{j\omega_v t}$ $w(t) = C_w e^{j\omega_w t}$

□ 求此 phasors 之相關函數。
 $z(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$

□ 與 sinusoids 之自相關函數。

解： Correlation of phasors and sinusoids

□ 互相關函數

$$R_{vw}(\tau) = \langle [C_v e^{j\omega_v t} [C_w e^{j\omega_w(t-\tau)}]^*] \rangle$$

$$= C_v C_w^* e^{j\omega_w \tau} \langle e^{j\omega_v t} e^{-j\omega_w t} \rangle$$

$$= \begin{cases} 0 & \omega_w \neq \omega_v \\ C_v C_w^* e^{j\omega_v \tau} & \omega_w = \omega_v \end{cases}$$

□ 自相關函數 $R_z(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau$

□ 若只為 sinusoids

$$z(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$R_v(\tau) = |C_v|^2 e^{j\omega_v \tau}$$

二、能量訊號之相關性(Correlation of Energy Signals)

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 功率訊號之相關性 、 能量訊號之相關性 、 頻譜密度函數 、 範例：Comb Filter(梳型濾波器) | |

□ 訊號能量定義 $E_v = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)v^*(t)dt \geq 0$

□ 互相關定義

$$R_{vw}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)w^*(t-\tau)dt$$

□ 注意積分之上下限(能量與功率訊號不同)

□ 其餘定義

$$R_v(\tau) = R_{vv}(\tau)$$

$$|R_{vw}(\tau)|^2 \leq E_v E_w$$

▣ 摺積之定義

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda) w^*(\tau - \lambda) d\lambda = v(\tau) * z(\tau)$$

▣ 因此

$$R_{vw}(\tau) = v(\tau) * w^*(-\tau)$$

□ 自相關與頻譜密度關係

$$R_v(0) = E_v = \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2 df$$

□ 互相關與頻譜密度關係

$$R_{vw}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) w^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} V(f) W^*(f) df$$

□ 頻域之 Schwarz's inequality

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} V(f) W^*(f) df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |W(f)|^2 df$$

相關函數

□ 訊號之自相關與互相關可應用於

- ▣ 圖訊識別(Pattern Recognition)
- ▣ 訊號偵測
- ▣ 解調變
- ▣ 匹配濾波器
- ▣ 訊號之頻譜密度：訊號相關函數之 FT 為其頻譜密度函數。

三、頻譜密度函數(Spectral Density Functions)

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 功率訊號之相關性 、 能量訊號之相關性 、 頻譜密度函數 、 範例：Comb Filter(梳型濾波器) | |

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_v(f) df = R_v(0)$$

□ 若 H(f)為濾波系統轉移函數則輸出功率頻譜

$$G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f)$$

□ 若濾波器頻寬很小，且等增益(1)

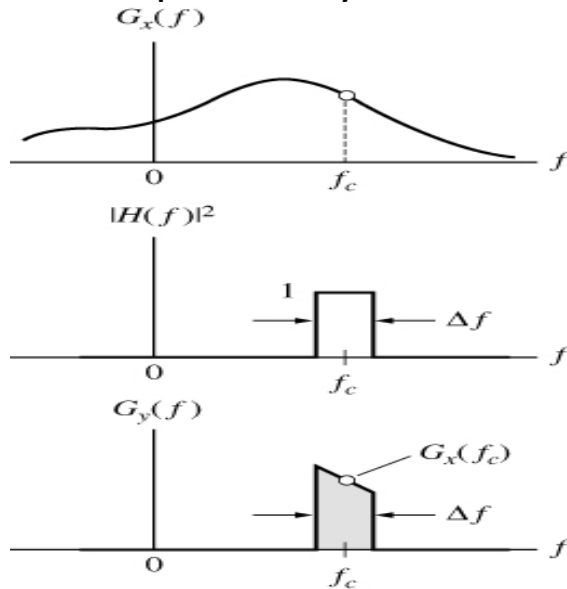
$$R_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 G_x(f) df$$

$$G_x(f_c) \approx R_y(0) / \Delta f$$

$$G_v(f) = \mathcal{F}_\tau[R_v(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_v(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$R_v(\tau) \xrightarrow{FT} G_v(f)$$

Interpretation of spectral density functions



Spectral Density Functions

- 所以自相關函數為功率密度頻譜之反富氏轉換

$$R_v(\tau) = \mathcal{F}_\tau^{-1}[G_v(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} G_v(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

- 功率密度頻譜與頻譜關係

$$G_v(f) = |V(f)|^2$$

- 若為週期訊號

$$v(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c(nf_0) e^{j2\pi n f_0 t}$$

- 則功率頻譜密度

$$G_v(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} |c(nf_0)|^2 \delta(f - nf_0)$$

範例：

- 假設訊號 $x(t) = \text{sinc}(10t)$

- 系統轉移函數為

$$H(f) = 3\Pi\left(\frac{f}{4}\right)e^{-j4\pi f}$$

- 求：
- X(t)之能量頻譜密度？
 - 輸出之頻譜密度？
 - X(t)與輸出之能量？
 - 輸出 y(t)？

解：

- X(t)之能量頻譜密度

$$G_x(f) = |X(f)|^2 = \frac{1}{100}\Pi\left(\frac{f}{10}\right)$$

- 輸出之頻譜密度

$$\begin{aligned} G_y(f) &= |H(f)|^2 G_x(f) \\ G_y(f) &= |X(f)|^2 = \frac{1}{100}\Pi\left(\frac{f}{10}\right) \\ &= \left[9\Pi\left(\frac{f}{4}\right)\right] \left[\frac{1}{100}\Pi\left(\frac{f}{10}\right)\right] \\ &= \frac{9}{100}\Pi\left(\frac{f}{4}\right) \end{aligned}$$

- X(t)與輸出之能量

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) df = \int_{-5}^5 \frac{1}{100} df = \frac{1}{10} \\ E_y &= \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(f) df = \int_{-2}^2 \frac{9}{100} df = \frac{9}{25} \end{aligned}$$

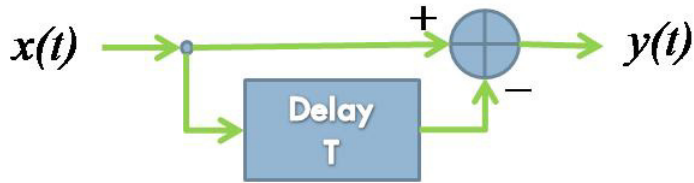
- 輸出 y(t)

$$\begin{aligned} Y(f) &= X(f)H(f) = \frac{3}{10}\Pi\left(\frac{f}{4}\right)e^{-j4\pi f} = \frac{1}{4}\left\{\frac{12}{10}\Pi\left(\frac{f}{4}\right)e^{-j2\pi 8\frac{f}{4}}\right\} \\ \text{IFT} \rightarrow y(t) &= \frac{6}{5}\text{sinc}(4(t-2)) \end{aligned}$$

四、範例：Comb Filter(梳型濾波器)

| | | |
|------|---|--------------------|
| 相關單元 | 學習目標 、 線性非時變系統 、 方塊圖分析 、 傳輸中訊號失真 、 傳輸損失增益與分貝 、 濾波器與濾波 、 正交濾波器 、 相關函數與頻譜密度 | 目錄 |
| 相關資料 | 功率訊號之相關性 、 能量訊號之相關性 、 頻譜密度函數 、 範例：Comb Filter(梳型濾波器) | |

- 如圖之濾波器



□ 求

- 脈衝響應？
- 轉移函數？

□ ANS :

- 脈衝響應

$$h(t) = \delta(t) - \delta(t - T)$$

- 轉移函數

$$H(f) = 1 - e^{-j2\pi fT}$$

□ 應用：Comb Filter

□ 濾波器之功率頻譜

$$|H(f)|^2 = 2 - e^{-j2\pi fT} - e^{j2\pi fT} = 4 \sin^2 2\pi(f / f_c) \quad f_c = 2/T$$

□ 若輸入功率密度已知，則輸出功率密度

$$G_y(f) = 4 \sin^2 2\pi(f / f_c) G_x(f)$$

□ 輸出之自相關函數

$$R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[G_y(f)]$$

$$R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[|H(f)|^2] * R_x(f)$$

□ 因為

$$\mathcal{F}^{-1}[|H(f)|^2] = 2\delta(\tau) - \delta(\tau - T) - \delta(\tau + T)$$

□ 所以

$$R_y(\tau) = 2R_x(\tau) - R_x(\tau - T) - R_x(\tau + T)$$