第二章 訊號與評譜Signal and spectrum

作者： 陳昭宏
義守大學 電子工程系

相關資料	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄

目錄

第一節 學習目標

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄

- 畫出或標示多弦波訊號之線頻譜。
- 計算計算簡單訊號之平均、功率、總功率與能量。
- 寫出訊號之 Fourier 級數與轉換之表示式。
- 由時域辨識訊號之性質或由頻域辨識訊號之性質。
- 畫出或標示方波列、單一方波與 sinc 脈波。
- 說明與應用 Parseval’ s power theorem、Rayleigh’ s energy theorem。
- 描述 Fourier 轉換之定理：time delay, scale change, …
- 應用Fourier轉換之定理計算訊號之頻譜。
- 瞭解與應用摺積定理(convolution)
- 說明 impulses
- 計算含(impulses, steps, sinusoids, rectangular)之頻譜。

第二節 弦波訊號基本定義

相關資料	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	線頻與Fourier series、週期訊號與平均功率、 範例	

$$v(t) = A\cos(\varpi_0 t + \phi)$$

A：振幅

ϖ_0: 角頻率

ϕ：相位角

- 上列訊號將以一時間(週期)重覆。 $T_0 = 2\pi/\varpi_0$ 週期 $f_0 \equiv 1/T_0$ 頻率

Euler’ s theorem

- Euler’ s 公式 $e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta$
- 任何弦波函數可用下列方式表示為相量(Phasor)

$$v(t) = A\cos(\varpi_0 t + \phi) = \mathrm{A\,Re}\left[e^{j(\varpi_0 t + \phi)}\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\mathrm{A}e^{j(\varpi_0 t + \phi)}\right]$$

一、線頻與Fourier series

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	線頻與Fourier series、週期訊號與平均功率、 範例	

- 每一單一頻率之弦波訊號可以表示為相量(phasor)。

$$v(t) = A\cos(\varpi_0 t + \phi)$$
$$\Rightarrow \quad v(t) = \mathrm{Re}\left\{Ae^{j(\varpi_0 t + \phi)}\right\}$$
$$\Rightarrow \quad \mathbf{V} = A\angle\phi$$

  - 每一頻率之可由相量畫出其頻譜或相譜。
- 任意週期訊號可表示為Fourier series，運算獲得對應之頻譜，稱線頻譜(line spectral)。

表示為線頻譜之規則

- ☐ 以頻率 f 表示。

$$f_0 \equiv 1/T_0 \qquad T_0 = 2\pi/\varpi_0$$

- ☐ 相角對應於 cosine 函數。

$$\sin \varpi t = \cos(\varpi t - 90^\circ)$$

- ☐ 振幅為正數。

$$-A\cos(\varpi) = A\cos(\varpi t \pm 180^\circ)$$

- ☐ 相位。

度度量：$A\cos(\varpi t \pm 180^\circ)$

徑度量：$A\cos(\varpi t \pm \pi)$

二、週期訊號與平均功率

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	線頻與Fourier series、週期訊號與平均功率、 範例	

- ☐ 週期訊號，有下列關係

$$v(t \pm mT_0) = v(t), \quad -\infty < t < \infty$$

- ◘ 訊號平均值 $\langle v(t) \rangle \equiv \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v(t)dt$

- ◘ 週期訊號平均值

$$\langle v(t) \rangle \equiv \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} v(t)dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t)dt$$

- ◘ 平均功率 $P = \langle |v(t)|^2 \rangle \equiv \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |v(t)|^2 dt$

三、範例

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	線頻與Fourier series、週期訊號與平均功率、 範例	

□ 弦波訊號

$$v(t) = A\cos\left(\varpi_0 t + \varphi\right)$$

A: 振幅
ϖ_0: 角頻率
φ: 相位角

□ 平均值

$$\langle v(t)\rangle \equiv \frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} A\cos(\varpi_0 t + \phi)dt = 0$$

□ 平均功率

$$P = \left\langle |v(t)|^2 \right\rangle \equiv \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |A\cos(\varpi_0 t + \phi)|^2 dt$$

$$= A^2 \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |\cos(\varpi_0 t + \phi)|^2 dt = \frac{1}{2}A^2$$

第三節 Fourier representations for four class of signals

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	Periodic Signal and Fourier Series (FS)、三角富利葉級數、誤差方均值、系統特徵問題簡介、線性非時變系統之特徵函數、富氏分析之收斂條件、Parseval's Power Theorem	

Time property	Periodic 週期	Nonperiodic 非週期
Continuous 連續	**Fourier series (FS)**	**Fourier Transform (FT)**
Discete 離散	**Discrete-Time Fourier series (DTFS)**	**Discrete-Time Fourier Transform (DTFT)**

一、Periodic Signal → Fourier Series (FS)

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	Periodic Signal and Fourier Series (FS)、三角富利葉級數、誤差方均值、系統特徵問題簡介、線性非時變系統之特徵函數、富氏分析之收斂條件、Parseval's Power Theorem	

- ☐ 任意離散之週期訊號週期為 N, x[n]=x[n+N], 可表示如下, DTFS:

$$\hat{v}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k)e^{jk\varpi_0 t}, \qquad \omega_0=\tfrac{2\pi}{T}$$

$$\boxed{e^{jk\varpi_0 t}\text{稱}e^{j\varpi_0 t}\text{之}k\text{次諧波}(harmonic)}$$

- ☐ 任意連續之週期訊號週期為 T, x(t)=x(t+T), 可表示如下, FS:

$$\hat{v}[n]=\sum_{k=0}^{N-1} A[k]e^{jk\Omega_0 n}, \qquad \Omega_0=\tfrac{2\pi}{N}$$

$$\boxed{e^{jk\Omega_0 n}\text{稱}e^{j\Omega_0 n}\text{之}k\text{次諧波}(harmonic)}$$

諧波(harmonics)

- ☐ 所有頻率皆為主頻率(fundamental frequency)之整數倍 n，稱 n 次諧波(harmonics)。各分量大小如下：

$$C(n)=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} v(t)e^{-j2\pi n f_0 t}dt, \qquad f_0=\tfrac{1}{T}$$

- ◘ DC 分量： $C(0)=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} v(t)dt=\langle v(t)\rangle$

- ◘ 若為實數訊號 $C(-n)=C(n)^*=|C(n)|e^{-j\arg C(n)}$

二、三角富利葉級數(Trigonometric Fourier series)

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	Periodic Signal and Fourier Series (FS)、三角富利葉級數、誤差方均值、系統特徵問題簡介、線性非時變系統之特徵函數、富氏分析之收斂條件、Parseval's Power Theorem	

$$\hat{v}(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}|2c(n)|\cos(2\pi n f_0 t+\arg c_n)$$

- ☐ 常計算如下運算

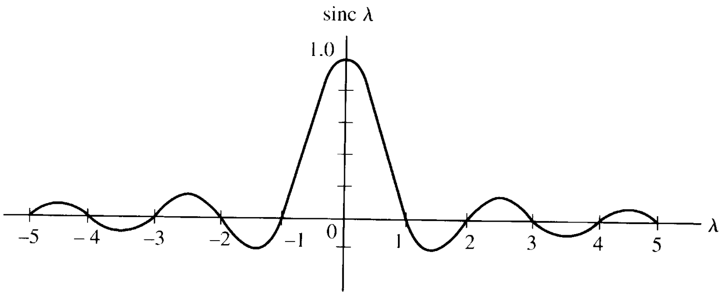
$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi f t}dt=\frac{1}{j2\pi f T}\left(e^{j\pi T T}-e^{-j\pi f T}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi f T}\sin(\pi f T)$$

- ☐ 定義 Sinc 函數 $\operatorname{sinc}(\lambda)=\frac{1}{\pi\lambda}\sin(\pi\lambda)$

$$\operatorname{sinc}(\lambda)=\begin{cases}1 & \lambda=0\\ 0 & \lambda=\pm1,\pm2,\cdots\end{cases}$$

- ☐ Sinc 函數波形



三、誤差方均值(均方誤差值) MSE of Representation

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	Periodic Signal and Fourier Series (FS)、三角富利葉級數、誤差方均值、系統特徵問題簡介、線性非時變系統之特徵函數、富氏分析之收斂條件、Parseval's Power Theorem	

- ☐ 誤差方均值(均方誤差值) ：為估測值與原訊號之差量比較函數，可用於判斷兩訊號之相同程度。

$$\text{連續} MSE = \frac{1}{T}\int_0^T \left|x(t)-\hat{x}(t)\right|^2$$

$$\text{離散} MSE = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \left|x[n]-\hat{x}[n]\right|^2$$

非週期訊號(nonperiodic signal) →Fourier transform (FT)

- ☐ 任何非週期訊號可以表示為下列近似值

連續$x(t)$

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X\left(j\omega\right)e^{j\omega t}\,d\omega$$

離散$x[n]$

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\Omega}\right)e^{j\Omega n}\,d\Omega$$

問題：判斷下列訊號之分析法。

$(a)\quad x[n]=(\tfrac{1}{2})^n u[n]$

$(b)\quad x(t)=1-\cos(2\pi t)+\sin(3\pi t)$

$(c)\quad x(t)=e^{-t}\cos(2\pi t)u(t)$

$$(d)\quad x[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta[n-20m]-\delta[n-2-20m]$$

- ☐ 先判斷連續或離散(DT)
- ☐ 再判斷週期(FS)或非週期(FT)

  $(a)DTFT,(b)FS,(c)FT,(d)DTFS$

四、系統特徵問題簡介

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	Periodic Signal and Fourier Series (FS)、三角富利葉級數、誤差方均值、系統特徵問題簡介、線性非時變系統之特徵函數、富氏分析之收斂條件、Parseval's Power Theorem	

- ☐ 任一運算子 H, 求下列等式之解,

  $H\{x(t)\}=\lambda x(x)$
- ☐ 稱特徵問題

  特徵值:λ

  對應於λ之特徵函數$x(x)$

- ☐ 求出之解

若H有等效之轉換矩陣A

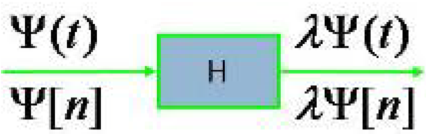
$$\mathbf{A}\mathbf{e}_k=\lambda_k\mathbf{e}_k$$

特徵值λ_k對應之特徵向量$\mathbf{e}_k$

線性系統之特徵函數性質 The eigenfunction Property of Linear Systems

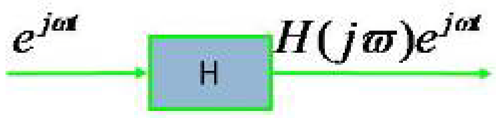
"The action of the system on an eigenfunction input is multiplication by the corresponding eigenvalue."

(A) general eigenfunction



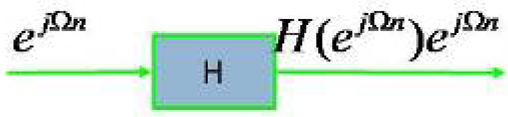
eigenfunction Ψ(t) or Ψ[n] and eigenvalue λ.

(B) 連續 complex sinusoidal



eigenfunction ejωt and eigenvalue h(jω).

(C)離散 complex sinusoidal



eigenfunction ejΩn and eigenvalue h(ejΩ).

訊號之 eigenfunction 表示法

若$e^{j\varpi_k t},(k=1,\ldots,M)$為訊號空間之特徵函數

則任何訊號$x(t)$可以表示為

$$x(t)=\sum_{k=1}^{M}a_k e^{j\omega_k t}$$

a_k為訊號$x(t)$在$e^{j\varpi_k t}$之分量

五、線性非時變系統之特徵函數(Eigenfunction of LTI system)

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	Periodic Signal and Fourier Series (FS)、三角富利葉級數、誤差方均值、系統特徵問題簡介、線性非時變系統之特徵函數、富氏分析之收斂條件、Parseval's Power Theorem	

若$e^{j\varpi_k t},(k=1,\ldots,M)$

為輸入訊號之訊號空間之特徵函數

則任何LTI系統可表示為

$$H(j\omega)=\sum_{k=1}^{M}H(j\omega_k)\delta(\varpi-\varpi_k)$$

則對應於輸入 $x(t)=\sum_{k=1}^{M}a_k e^{j\omega_k t}$

之輸出 $y(t)=\sum_{k=1}^{M}a_k H(j\varpi_k)e^{j\omega_k t}$

六、富氏分析之收斂條件

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	Periodic Signal and Fourier Series (FS)、三角富利葉級數、誤差方均值、系統特徵問題簡介、線性非時變系統之特徵函數、富氏分析之收斂條件、Parseval's Power Theorem	

$$\hat{v}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k) e^{jk\varpi_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

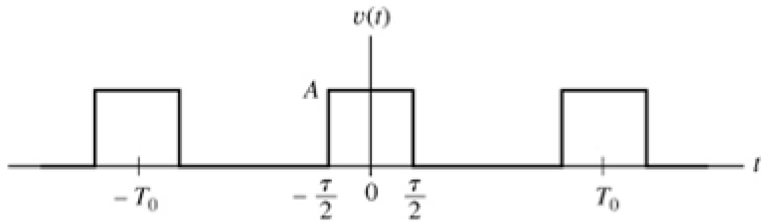
若 $v(t)$ 是square integerable 則可收斂 .

$\hat{v}(t)$ 是否會收斂至 $v(t)$?

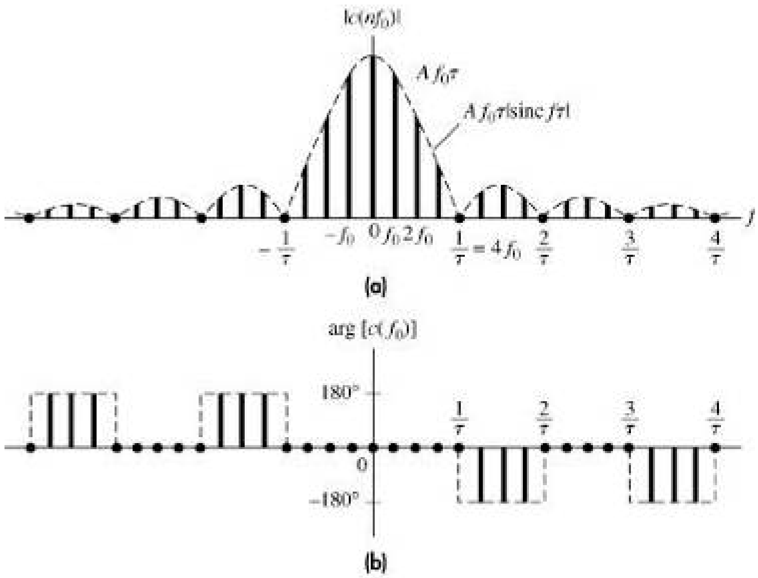
$$v_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} C(k) e^{jk\varpi_0 t}$$

方波脈衝列

- 為週期連續訊號
- 週期為 T_0
- 脈衝寬為 τ



Spectrum of rectangular pulse train with $f_0\tau = 1/4$ (a) Amplitude (b) Phase



$$\lim_{N\to\infty}\int_{T_0}\left|v(t)-v_N(t)\right|^2 dtv=0$$

Gibbs 現象

若$v(t)$有不連續點是否會收斂 ?

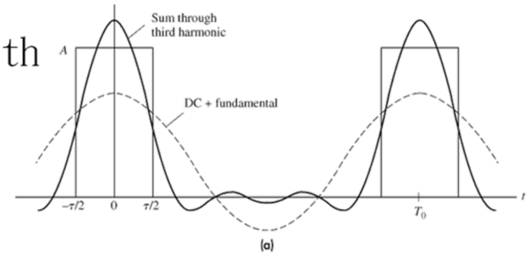
$v_N(t_0)\xrightarrow{\text{收斂於}}$不連續點之中間值

Gibbs 現象,若$v(t_0)$為不連續點 $v_N(t_0)$收斂於 .

不連續點之中間值$=\frac{1}{2}\left[v(t_{0-})+v(t_{0+})\right]$

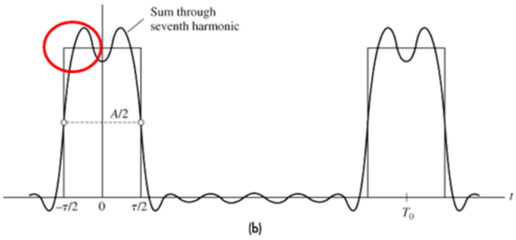
Fourier-series reconstruction of a rectangular pulse train(1/2)

- DC+1th
- ~3th



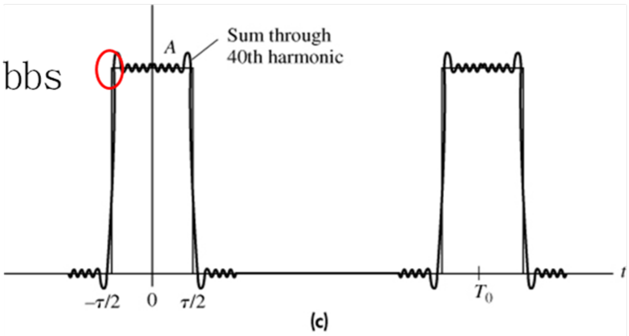
(a)

- ~7th



(b)

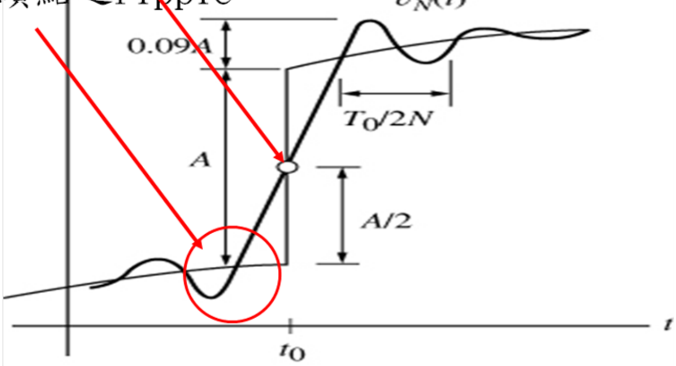
- ~40th
- Gibbs



(c)

Gibbs phenomenon at a step discontinuity

- 不連續點值
- 不連續點之ripple



七、Parseval’s Power Theorem

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄

相關資料	Periodic Signal and Fourier Series (FS)、三角富利葉級數、誤差方均值、系統特徵問題簡介、線性非時變系統之特徵函數、富氏分析之收斂條件、Parseval's Power Theorem

□ 訊號之平均功率與 Fourier 係數之關係。

$$P=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}|v(t)|^2dt=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}v(t)v^*(t)dt$$

$$v(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{j2\pi nf_0t}$$

$$v^*(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n^*e^{-j2\pi nf_0t}$$

$$P=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}v(t)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n^*e^{j2\pi nf_0t}\right)dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{T_0}\int_{T_0}v(t)e^{-j2\pi nf_0t}dt\right)c_n^*$$

$$P=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nc_n^*=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

訊號能量

□ 訊號能量 $E=\int_{-\infty}^{\infty}|v(t)|^2dt$

□ 若上式存在且 0<E<∞，則此訊號稱稱為非週期之能量訊號。

第四節 Fourier 轉換與連續頻譜

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	對稱訊號、因果訊號、Rayleigh's Energy Theorem、對偶定理	

- ☐ Fourier 轉換

$$V(f) = \mathcal{F}[v(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

- ☐ Inverse Fourier 轉換

$$v(t) = \mathcal{F}^{-1}[V(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} V(f) e^{j2\pi ft} dt$$

V(f) 頻譜之主要性質

- ☐ Fourier 轉換是複數函數。
- ☐ V(f),f=0 時 V(0)等於 v(t)之面積。

$$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j0t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) dt$$

- ☐ 實數訊號 v(t)

$$V(-f) = V^*(f)$$

$$|V(-f)| = |V(f)| \qquad \arg V(-f) = -\arg V(f)$$

方波脈衝(Retangular Pulse)

- ☐ 基本方波脈衝

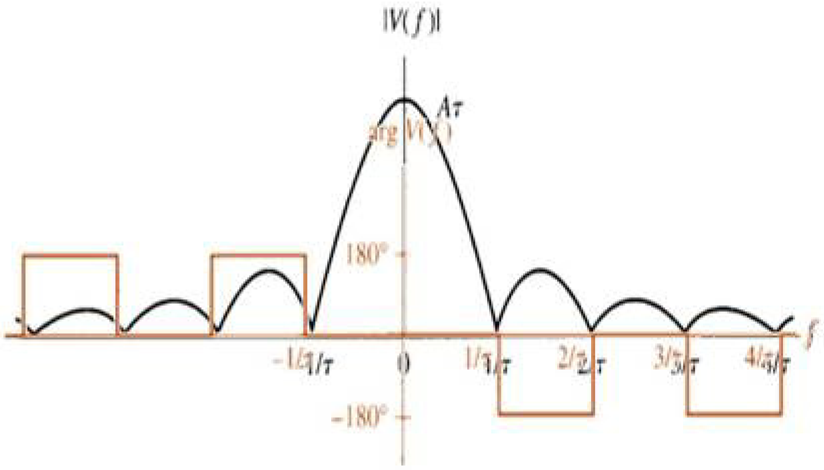
$$\prod(t/\tau) \equiv \begin{cases} 1 & |t| < \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

- ☐ 若 $v(t) = \prod(t/\tau)$

☐ 頻譜

$$V(f)=\int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{j2\pi ft}dt=\frac{A}{\pi f}\sin(\pi f\tau)=A\tau sinc(f\tau)$$

Rectangular pulse spectrum V(f) = Aτ sinc $f\tau$



一、對稱訊號(Symmetric signal)

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	對稱訊號、因果訊號、Rayleigh's Energy Theorem、對偶定理	

☐ 訊號頻譜 $V(f)=V_e(f)+jV_o(f)$

其中

$$V_e(f)=\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\cos(\varpi t)dt$$

$$V_o(f)=-\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\sin(\varpi t)dt$$

☐ Even symmetrical：若 $v(-t)=v(t)$

- 稱訊號為偶對稱(Even symmetrical) $V_o(f)=0$

☐ Odd symmetrical ：若 $v(-t)=v(-t)$

- 稱訊號為奇對稱(Odd symmetrical) $V_e(f)=0$

☐ Real symmetrical：若訊號為實數

$$V^*(f)=V_e(f)-jV_o(f)=V(-f)$$

二、因果訊號(Causal signal)

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	對稱訊號、因果訊號、Rayleigh's Energy Theorem、對偶定理	

- □ 若訊號 $v(t)=0, \quad t<0$
  - 稱因果訊號(Causal signal)
  - 簡言之，就是只有訊號開始後才可觀察到訊號。
  - 代入頻譜計算

$$V(f)=\int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-j2\pi ft}dt=\int_{0}^{\infty} v(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

  - 上式與 Laplace transform 類似。

$$\mathcal{L}[v(t)]=\int_{0}^{\infty} v(t)e^{-st}dt$$

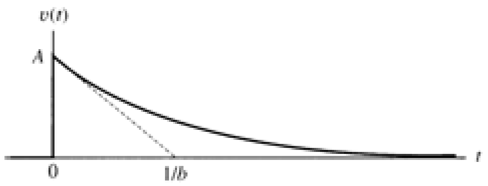
$$s \leftrightarrow j2\pi f$$

範例：causal exponential pulse

- □ 有一因果指數衰減波形，有時間常數 1/b
  - 波形函數

$$v(t)=\begin{cases} Ae^{-bt} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

  - 波形



(a)

求頻譜？

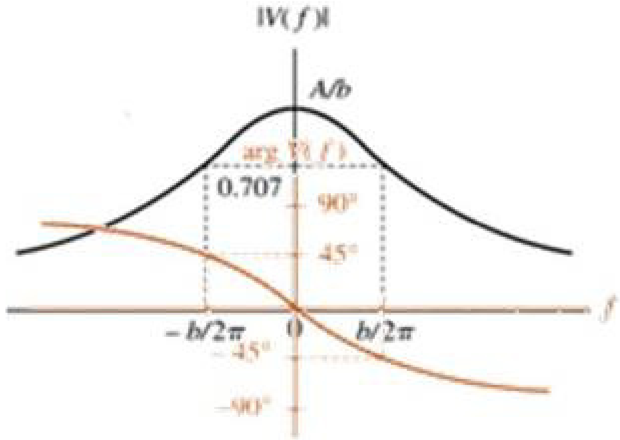
解：causal exponential pulse

$$v(t)=\begin{cases} Ae^{-bt} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \xrightarrow{\text{FT}} V(f)=\frac{A}{b+j2\pi f}$$

- 整理分母為實數 $V(f)=\dfrac{b-j2\pi f}{b^2+(2\pi f)^2}A$

  - 振幅 $|V(f)|=\dfrac{A}{\sqrt{b^2+(2\pi f)^2}}$

  - 相位 $\arg V(f)=-\arctan\left(\dfrac{2\pi f}{b}\right)$



三、Rayleigh's Energy Theorem

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	對稱訊號、因果訊號、Rayleigh's Energy Theorem、對偶定理	

- Rayleigh' s Energy Theorem (energy signal)類比於 Parseval' power theorem (power signal)，說明訊號 v(t)之能量

  $$E=\int_{-\infty}^{\infty}V(f)V^*(f)df=\int_{-\infty}^{\infty}|V(f)|df$$

  - 其中 V(f)為訊號之能量密度頻譜(energy spectral density)。

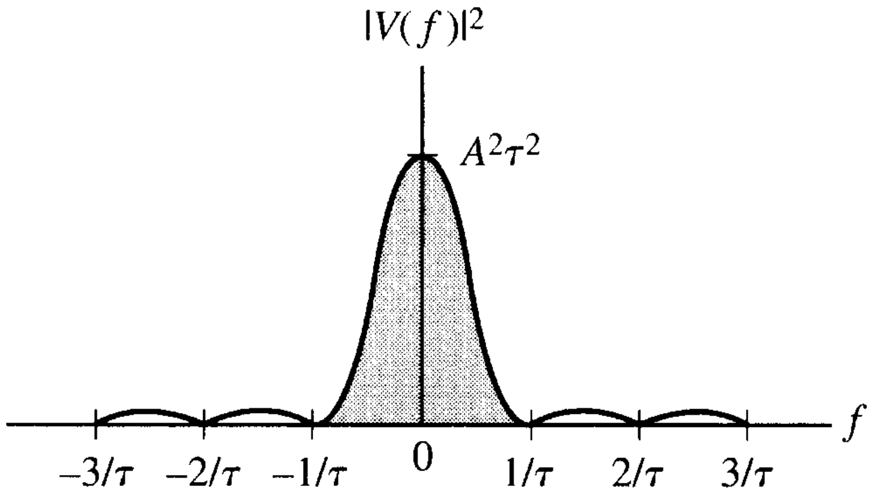
方波之能量密度頻譜(Energy spectral density of a rectangular)

- 假設有一方波脈衝(寬 τ)，能量密度頻譜(energy spectral density)，如下圖：

  - 假設只取頻帶 $|f|<1/\tau$

$$E = f = \int_{-1/\tau}^{1/\tau} |V(f)| df$$
$$= \int_{-1/\tau}^{1/\tau} (A\tau)^2 \operatorname{sinc}^2(f\tau) df = 0.92A^2\tau$$

- 約有 90%之能量。



四、對偶定理(Duality Theorem)

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	對稱訊號、因果訊號、Rayleigh's Energy Theorem、對偶定理	

- 若檢視所有 Fourier integral pair，可發現只有一些變數與符號不同。如：
  - 若$V(f) = \mathcal{F}(v(t))$
  - 假 設 $z(t) = V(t)$
  - 則 $\mathcal{F}[z(t)] = v(-f)$
    - 其中 $v(-f)$等於v(t), 其中$t = -f$

  - 對偶定理：簡單之概念

$$\boxed{\begin{array}{ll} v(t) \xrightarrow{FT} V(f) & V(f) \xrightarrow{IFT} v(t) \\ V(t) \xrightarrow{FT} v(-f) & V(f) \xrightarrow{IFT} v(-t) \end{array}}$$

範例：Sinc Pulse， $z(t) = A\operatorname{sinc}(2Wt)$

- 重要之分析訊號
  - 求其頻譜？

□ 解：

- 方波訊號之頻譜

  $v(t) = B\Pi\left(t/\tau\right) \xrightarrow{FT} V(f) = B\tau\,\mathrm{sinc}(f\tau)$

- 應用對偶性質 $B \to \dfrac{A}{2W}, \quad \tau \to 2W$

- 得 $z(t) = \left(\dfrac{A}{2W}\right)\left(2W\right)\mathrm{sinc}\left(t(2W)\right)$

  $Z(f) = \dfrac{A}{2W}\Pi\left(\dfrac{f}{2W}\right)$

第五節 時域與頻域之關係(Time and Frequency relations)

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	重疊性質、時間延遲、刻度變更、頻率轉移與調變、調變定理、微分與積分、Convolution	

- 重疊性質(Superposition)
- 時間延遲與刻度變更(Time Delay and Scale Change)
- 頻率轉移與調變(Frequency Translation and Modulation)
- 微分與積分(Differentiation and integration)運算

一、重疊性質(Superposition)

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	重疊性質、時間延遲、刻度變更、頻率轉移與調變、調變定理、微分與積分、Convolution	

- Fourier transform 之重疊性質
  - 若 兩訊號$v_1(t), v_2(t)$, 且常數a_1, a_2
  - 兩訊號之線性組合，令 $v(t) = a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t)$
  - 則

$$\mathcal{F}[v(t)] = a_1 \mathcal{F}[v_1(t)] + a_2 \mathcal{F}[v_2(t)]$$
$$\Rightarrow V(f) = a_1 V_1(f) + a_2 V_2(f)$$

  - 應用訊號之線性組合定理，則任意訊號之線性組合

$$\boxed{\sum_k a_k v_k(t) \leftrightarrow \sum_k a_k V_k(f)}$$

二、時間延遲 (Time delay)

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	重疊性質、時間延遲、刻度變更、頻率轉移與調變、調變定理、微分與積分、Convolution	

- 任何訊號 $v(t)$

- 若將 t→t-td，則稱為延遲 td， $v(t-t_d)$
- 此延遲後之訊號與原訊號有相同之波封波形，但時間位移位置不同。

- 如此訊號之頻譜關係 $v(t-t_d)\leftrightarrow V(f)e^{-j2\pi f t_d}$
  - 若

$$\boxed{t_d:\begin{cases}>0,\text{表示延遲}\\<0,\text{表示超前}\end{cases}}$$

  - 振幅頻譜

$$\boxed{\left|V(f)e^{-j2\pi f t_d}\right|=\left|V(f)\right|\left|e^{-j2\pi f t_d}\right|=\left|V(f)\right|}$$

三、刻度變更 (scale Change)

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時間與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	重疊性質、時間延遲、刻度變更、頻率轉移與調變、調變定理、微分與積分、Convolution	

- 時域軸之刻度放大縮小與頻域間之關係？
  - 時域與頻域軸放大縮小關係為倒數關係。
    - 時域放大頻域縮小，時域縮小頻域放大。

$$\boxed{v(\alpha t)\leftrightarrow\frac{1}{|\alpha|}V\left(\frac{f}{\alpha}\right),\quad \alpha\neq 0}$$

- 證明：

$$\mathcal{F}\left[v(-|\alpha|t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}v(-|\alpha|t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{|\alpha|}\int_{-\infty}^{\infty}v(\lambda)e^{-j2\pi(f/\alpha)\lambda}d\lambda$$

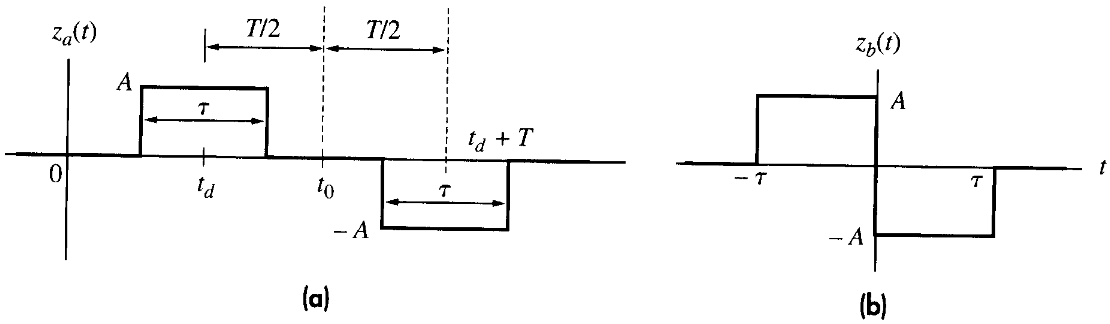
$$=\frac{-1}{|\alpha|}\int_{+\infty}^{-\infty}v(\lambda)e^{-j\omega\lambda/\alpha}d\lambda$$

$$\boxed{=\frac{1}{|\alpha|}V\left(\frac{f}{\alpha}\right),\quad \alpha\neq 0}$$

範例:使用方波脈衝表示下列波形

- 方波脈衝 $v(t) = A\prod(t/\tau)$

- 寫出下列圖形之數學表示式，並求頻譜？



解:使用方波脈衝表示下列波形 $v(t) = A\prod(t/\tau)$

- 圖(a)
  - 波形 $z_a(t) = v(t - t_d) + (-1)v(t - (t_d + T))$
  - 頻譜 $Z_a(f) = V(f)\left[e^{-2\pi f t_d} - e^{-2\pi f(t_d + T)}\right]$

$$Z_a(f) = [A\tau \operatorname{sinc}(f\tau)]\left[j2\sin(\pi f)Te^{-2\pi f t_0}\right], \qquad t_0 = t_d + T/2$$

  - 圖(b)
  - 波形 $z_b(t) = v(t + \tau/2) - v(t - \tau/2)$
  - 頻譜 $Z_b(f) = [A\tau \operatorname{sinc}(f\tau)][j2\sin(\pi f\tau)]$
  - 應用 sinc 函數之定義 $Z_b(f) = (j2\pi f\tau)\left[A\tau \operatorname{sinc}^2(f\tau)\right]$

四、頻率轉移與調變 (Frequency Translation and Modulation)

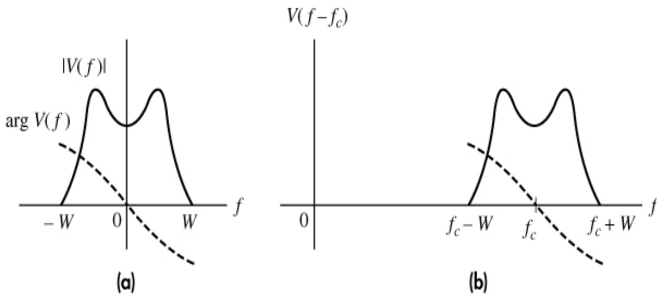
相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	重疊性質、時間延遲、刻度變更、頻率轉移與調變、調變定理、微分與積分、Convolution	

- 若 $v(t) \xrightarrow{\text{FT}} F(f), \qquad V(f) = \mathcal{F}(v(t))$

- 則稱下列運算為頻率移與調變(Frequency Translation and Modulation)。

$$v(t)e^{j\omega_c t} \xrightarrow{FT} V(f-f_c)$$

  - 因是乘 $e^{j\omega_c t}$
  - 稱複數調變(complex modulation)，
  - 頻譜只移至一單邊頻帶。
- 調變前後之頻譜，調變前(a)，調變後(b)。
  - 振幅、相位大小皆沒變化。
  - 由頻帶 0 移至中心頻 fc



五、調變定理(modulation theorem)

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	重疊性質、時間延遲、刻度變更、頻率轉移與調變、調變定理、微分與積分、Convolution	

- 實際應用調變時，無法使用複數訊號，因此，使用 cos

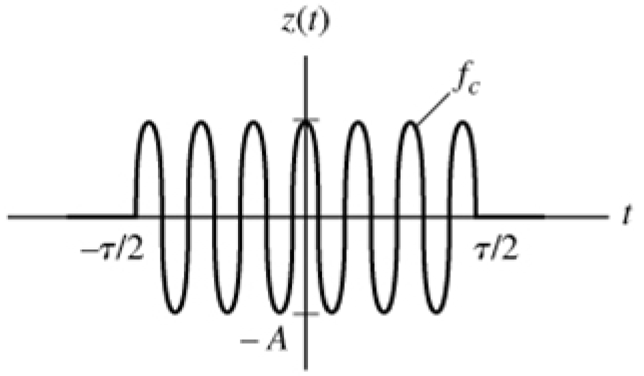
$$v(t)\cos(\varpi_c t+\phi) \leftrightarrow \frac{e^{j\phi}}{2}V(f-f_c)+\frac{e^{-j\phi}}{2}V(f+f_c)$$

  - 所以若訊號為時數訊號，頻譜為 Hermitian。
    - 所以頻寬為原來兩倍，因為負的頻譜也進入至正頻譜。
    - 實數訊號負頻譜之資訊是與正頻譜相同(為 Hermitian)

$$V^*(f)=V(-f)$$

範例：RF Pulse

- 若有如下圖之 RF 訊號



- 表示如下

$$z(t) = A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)\cos(\varpi_c t)$$

- 求頻譜？
  - 提示：　可視為將脈波訊號 $A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$ 調變至 ϖ_c

解：R Pulse

$$A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \xrightarrow{FT} A\tau\,\mathrm{sinc}(f\tau)$$

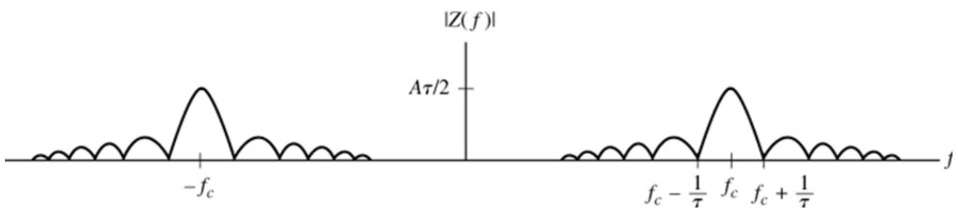
- 應用調變定理

$$v(t)\cos(\varpi_c t+\phi) \leftrightarrow \frac{e^{j\phi}}{2}V(f-f_c)+\frac{e^{-j\phi}}{2}V(f+f_c)$$

- 所以

$$Z(f)=\frac{A\tau}{2}\mathrm{sinc}((f-f_c)\tau)+\frac{A\tau}{2}\mathrm{sinc}((f+f_c)\tau)$$

- 振幅頻譜如：



六、微分與積分(Differentiation and Integration)

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄

相關資料	重疊性質、時間延遲、刻度變更、頻率轉移與調變、調變定理、微分與積分、Convolution	

- 微分與積分是常應用之運算，若時域訊號微分與積分，頻譜？
- Differentiation theorem

$$\frac{d}{dt}v(t)=\frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{\infty}V(f)e^{j2\pi ft}df\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}V(f)\left(\frac{d}{dt}e^{j2\pi ft}\right)df=\int_{-\infty}^{\infty}[j2\pi fV(f)]e^{j2\pi ft}df$$

  - 所以

$$\frac{d}{dt}v(t)\leftrightarrow j2\pi fV(f)$$

  - Nth 微分

$$\frac{d^n}{dt^n}v(t)\leftrightarrow(j2\pi f)^nV(f)$$

- Integration theorem

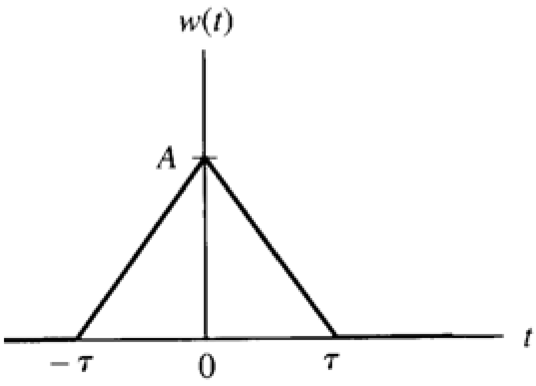
$$\int_{-\infty}^{t}v(\lambda)d\lambda=\int_{-\infty}^{t}\left[\int_{-\infty}^{\infty}V(f)e^{j2\pi f\lambda}df\right]d\lambda$$

$$\int_{-\infty}^{t}v(\lambda)d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}V(f)\left(\int_{-\infty}^{t}e^{j2\pi f\lambda}d\lambda\right)df$$

$$\int_{-\infty}^{t}v(\lambda)d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{j2\pi f}V(f)\right]e^{j2\pi ft}df$$

  - 假如 $V(0)=\int_{-\infty}^{\infty}v(\lambda)d\lambda=0$
  - 則 $\int_{-\infty}^{t}v(\lambda)d\lambda\leftrightarrow\frac{1}{j2\pi f}V(f)$

範例：三角脈波(Triangular Pulse)



- 有三角脈波如：

$$w(t) = \frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{t} z_b(\lambda)d\lambda = \begin{cases} A\left(1-\frac{|t|}{\tau}\right) & |t| < \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases}$$

  - 求頻譜？
  - 提示：可以使用積分定理。並求

$$z_b(t) == \begin{cases} A & -\tau < t < 0 \\ -A & 0 < t < \tau \end{cases} \xrightarrow{FT} Z_b(f)$$

解：三角脈波(Triangular Pulse)

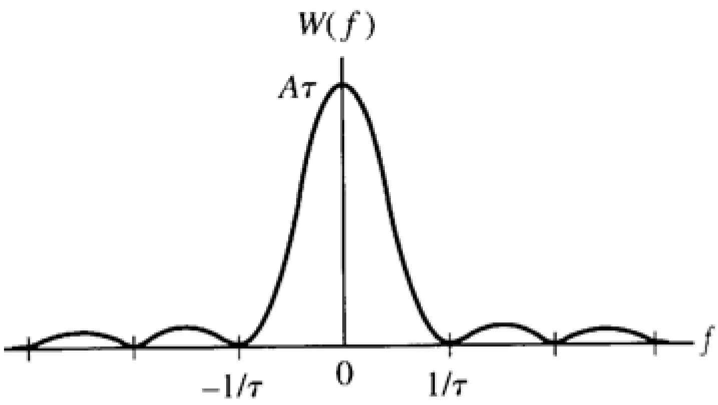
- 計算

$$z_b(t) == \begin{cases} A & -\tau < t < 0 \\ -A & 0 < t < \tau \end{cases} \xrightarrow{FT} Z_b(f) = (j2\pi f\tau)A\tau\,\mathrm{sinc}^2\left(f\tau\right)$$

- 應用積分定理 $\int_{-\infty}^{t} v(\lambda)d\lambda \leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f}V(f)$

$$w(t) = \frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{t} z_b(\lambda)d\lambda$$

$$\therefore W(f) = \frac{1}{\tau}\frac{1}{j2\pi f}Z_b(f) = A\tau\,\mathrm{sinc}^2\left(f\tau\right)$$



七、Convolution

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	重疊性質、時間延遲、刻度變更、頻率轉移與調變、調變定理、微分與積分、Convolution	

- 數學運算 convolution 被高度應用於通訊工程中，是一種重要工具。
  - 應用於 「系統分析」。
  - 應用於 「機率分佈之轉換計算」。
- Convolution 可以被應用於時域與頻域。
  - 時域 Convolution→ 頻域有何結果？
  - 頻域 Convolution→ 時域有何結果？

Convolution Integral

- 若有兩函數，有相同之自變數 t(如：時間) $v(t)$, $w(t)$
  - 則兩函數間之摺積運算定義為

$$v(t)*w(t)=w(t)*v(t)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}w(\lambda)v(t-\lambda)d\lambda$$

- 注意定義之中之 λ，可以是任何之變數符號。
- 又 convolution 是有交換性的所以

$$v(t)*w(t)=v*w(t)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}v(\lambda)w(t-\lambda)d\lambda$$

摺積之圖示(Graphical interpretation of convolution)

- 下面將進行 convolution 之分解圖示

$$v(t) = Ae^{-t}, \quad 0 < t < \infty$$

$$w(t) = t/T, \quad 0 < t < T$$

- ☐ 中間過程函數 $w(t-\lambda) = (t-\lambda)/T, \quad 0 < t < T$

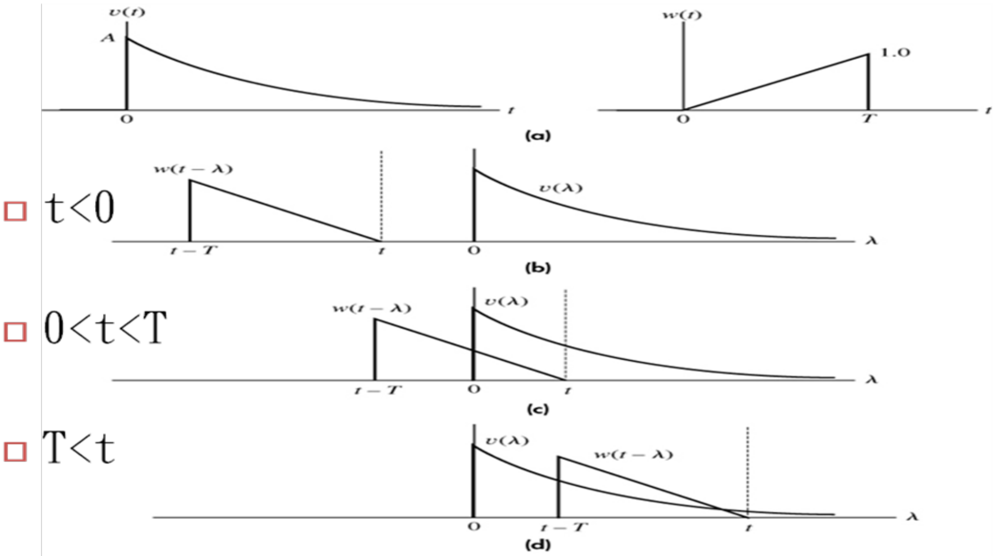
  - 分段積分

$$t < 0, \quad v * w(t) = 0$$

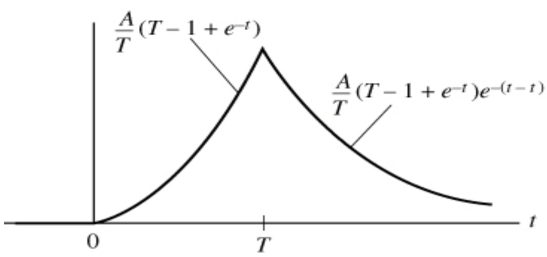
$$0 < t < T, \quad v * w(t) = \int_0^t Ae^{-\lambda}\left(\frac{t-\lambda}{T}\right)d\lambda = \frac{A}{T}\left(t - 1 + e^{-t}\right)$$

$$T < t, \quad v * w(t) = \int_{t-T}^{t} Ae^{-\lambda}\left(\frac{t-\lambda}{T}\right)d\lambda = \frac{A}{T}\left(T - 1 + e^{-T}\right)e^{-(t-T)}$$

Graphical interpretation of convolution

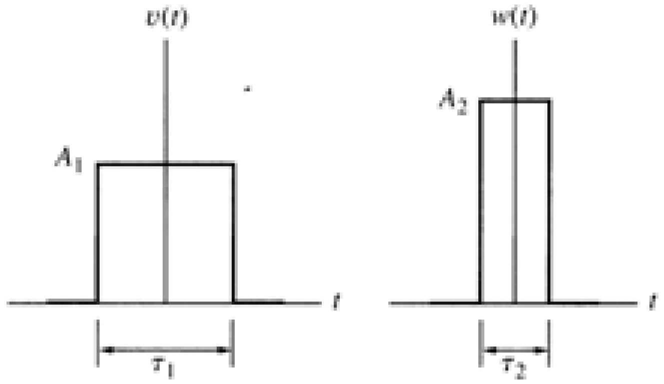


Result of the convolution



範例：Trapezoidal pulse 之 convolution

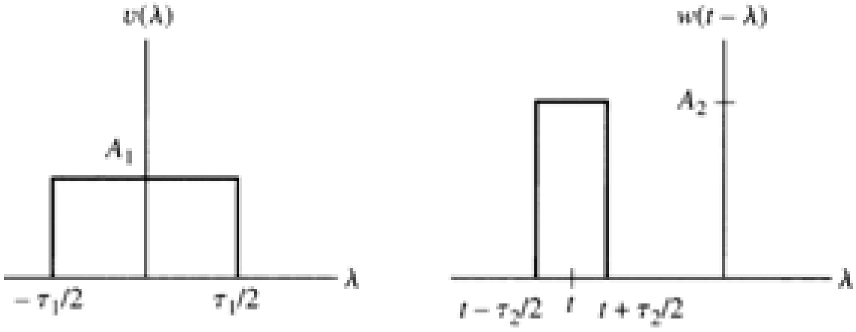
- ☐ 若有兩函數波形如



■ 求兩函數之 convolution？

解：Trapezoidal pulse 之 convoluion

□ 中間過程函數



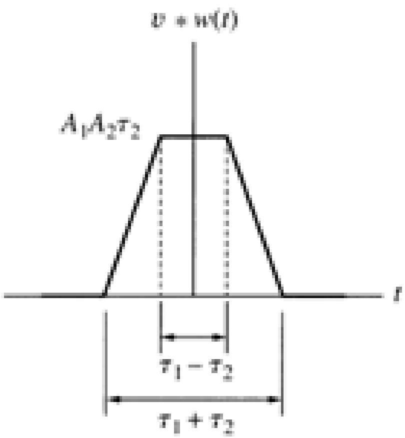
□ 分段積分

$-\frac{\tau_1+\tau_2}{2} < t < -\frac{\tau_1-\tau_2}{2},\quad v*w(t) = A_1A_2\left(t+\frac{\tau_1+\tau_2}{2}\right)$

$-\frac{\tau_1-\tau_2}{2} < t < \frac{\tau_1-\tau_2}{2},\quad v*w(t) = A_1A_2\tau_2$

$\frac{\tau_1-\tau_2}{2} < t < \frac{\tau_1+\tau_2}{2},\quad v*w(t) = A_1A_2\left(-t+\frac{\tau_1+\tau_2}{2}\right)$

其他 $v*w(t) = 0$



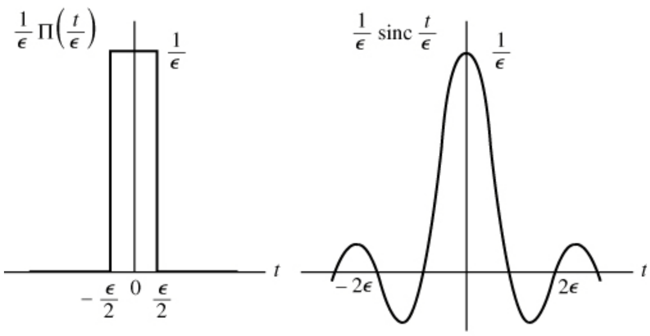
第六節 Impulse and transforms in the limit

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	脈衝性質、脈衝之運算、Impulses in frequency、步階函數、符號函數、Impulses in Time、範例：Raised Cosine Pulse	

- ☐ Impulse : 脈衝函數，可以應用於時域與頻域，當訊號為弦波訊號時，其頻譜就必需以頻域之脈衝函數表示。
- ☐ Transform in the limit：以極限之概念所定義之轉換，impulse function 就是一種以極限概念所定義之函數與轉換。
  - ◘ 常用於訊號之表示，尤其是非因果之訊號。

Two functions that become impulses as $\varepsilon \to 0$

- ☐ 下圖為兩種運用 Transform in the limit 所定義之 impulse function。



一、脈衝性質(Properties of the unit impulses)

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	脈衝性質、脈衝之運算、Impulses in frequency、步階函數、符號函數、Impulses in Time、範例：Raised Cosine Pulse	

- ☐ Unit impulse (or Dirac delta function)為一特殊函數，定義

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t)dt=1$$

$$\delta(t)=0,\qquad t\neq 0$$

  - ◘ 基本性質

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\delta(t)dt = \begin{cases} v(0) & t_1 < t < t_2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

- 取樣運算積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\delta(t-t_d)dt = v(t_d)$$

二、脈衝之運算

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	脈衝性質、脈衝之運算、Impulses in frequency、步階函數、符號函數、Impulses in Time、範例：Raised Cosine Pulse	

- 延遲

$$\delta(t-t_d) \leftrightarrow Ae^{-j2\pi f t_d}$$

$$v(t) * \delta(t-t_d) = v(t-t_d)$$

- 積分

$$v(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt = u(t), \qquad \text{step signal}$$

- 摺積

$$v(t) = w(t) * \delta(t) = w(t)$$

- 相乘

$$v(t) = w(t) \times \delta(t) = w(0) \times \delta(t)$$

三、Impulses in frequency

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	脈衝性質、脈衝之運算、Impulses in frequency、步階函數、符號函數、Impulses in Time、範例：Raised Cosine Pulse	

- 若純直流(DC)　$v(t) = A$
  - 頻譜？

- 可以以 transforms in the limit 之概念定義

  $$v(t) = \lim_{W \to 0} A\operatorname{sinc}(2Wt) = A$$

  - 因為 fourier transform pair

    $$A\operatorname{sinc}(2Wt) \leftrightarrow \frac{A}{2W}\prod\left(\frac{f}{2W}\right)$$

    $$A \leftrightarrow A\delta(f)$$

- W→0 得

- 若為弦波訊號 $v(t) = A\cos(\varpi_c t + \phi)$
  - 頻譜？以 frequency translation and modulation 概念

    $$Ae^{j\varpi_c t} \leftrightarrow A\delta(f - f_c)$$

  - 應用 Eulere 公式

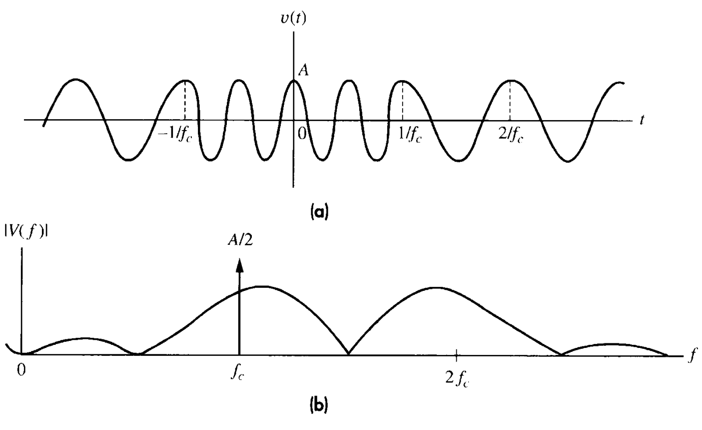
    $$A\cos(\varpi_c t + \phi) \leftrightarrow \frac{Ae^{j\phi}}{2}\delta(f - f_c) + \frac{Ae^{-j\phi}}{2}\delta(f + f_c)$$

  - Fourier series

    $$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(nf_0)e^{j2\pi nf_0 t} \leftrightarrow V(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(nf_0)\delta(f - nf_0)$$

範例說明：FM 訊號之頻譜表示

- 如下圖為 FM 訊號與其頻譜



- 如下為 FM 訊號表示

$$v(t) = A\cos(\varpi_c t) - A\prod(t/\tau)\cos(\varpi_c t) + A\prod(t/\tau)\cos(2\varpi_c t)$$

□ 頻譜

$$V(f)=\frac{A}{2}\left[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)\right]$$
$$-\frac{A\tau}{2}\left[\mathrm{sinc}((f-f_c)\tau)+\mathrm{sinc}((f+f_c)\tau)\right]$$
$$+\frac{A\tau}{2}\left[\mathrm{sinc}((f-2f_c)\tau)+\mathrm{sinc}((f+2f_c)\tau)\right]$$

四、步階函數(Step functions)

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	脈衝性質、脈衝之運算、Impulses in frequency、步階函數、符號函數、Impulses in Time、範例：Raised Cosine Pulse	

□ 步階函數如下圖

□ 函數表示如

$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

■ 與脈衝函數之關係

$$u(t)=\int\delta(t)dt$$

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}t$$

五、符號函數(Sign functions)

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	脈衝性質、脈衝之運算、Impulses in frequency、步階函數、符號函數、Impulses in Time、範例：Raised Cosine Pulse	

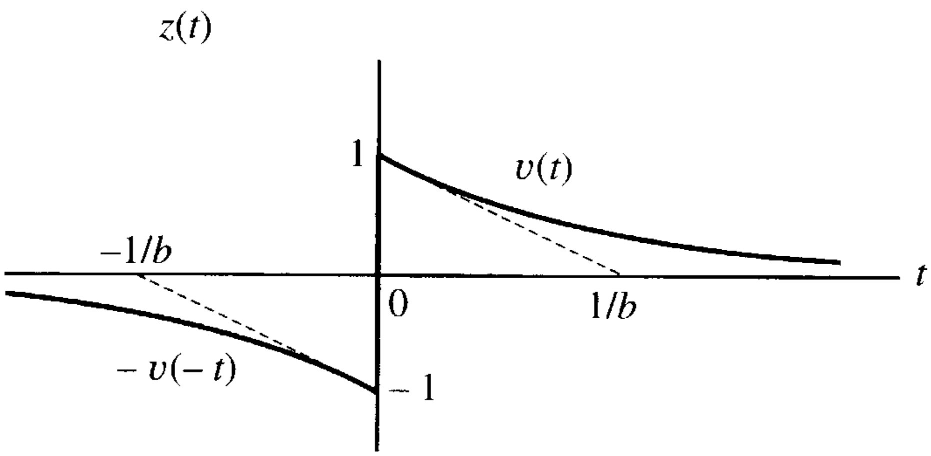
□ 符號函數如圖

- 函數表示如

$$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}+1 & t>0\\ -1 & t<0\end{cases}$$

- 可由下圖之極限值定義

$$z(t)=\begin{cases}+e^{-bt} & t>0\\ -e^{+bt} & t<0\end{cases}\xrightarrow{b\to 0}u(t)$$



六、Impulses in Time

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	脈衝性質、脈衝之運算、Impulses in frequency、步階函數、符號函數、Impulses in Time、範例：Raised Cosine Pulse	

$$\frac{A}{\tau}\prod\left(\frac{t}{\tau}\right)\leftrightarrow A\operatorname{sinc}(f\tau)$$

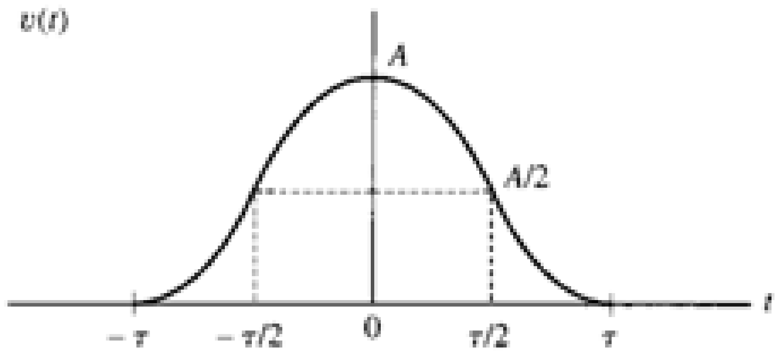
- 若 τ→0 ，$A\delta(t)\leftrightarrow A$
- Time impulse 表示在頻域，所有頻率有相同之振幅。

□ “An impulsive signal with zero duration has infinite spectral width, whereas a constant signal with infinite duration gas zero spectral width.”

七、範例：Raised Cosine Pulse

相關單元	學習目標、弦波訊號基本定義、Fourier representations、Fourier轉換與連續頻譜、時域與頻域之關係、Impulse and transforms in the limit	目錄
相關資料	脈衝性質、脈衝之運算、Impulses in frequency、步階函數、符號函數、Impulses in Time、範例：Raised Cosine Pulse	

□ 如圖：raised cosine pulse



- 表示式為

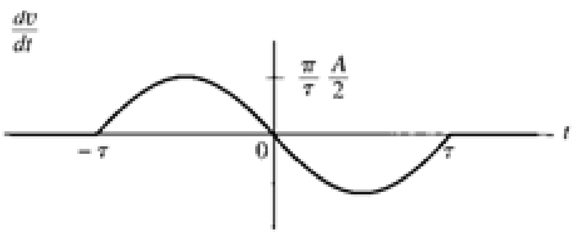
$$v(t) = \frac{A}{2}\left(1+\cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)\right)\prod\left(\left(\frac{t}{2\tau}\right)\right)$$

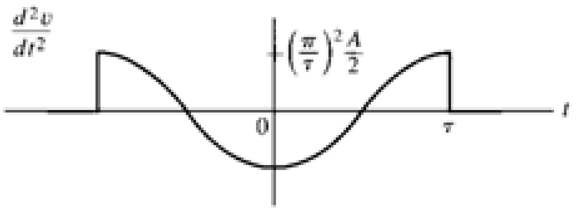
- 求頻譜？
  - 提示：應用微分定理。

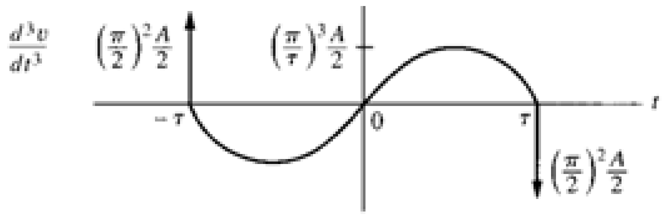
解：Raised Cosine Pulse

□ 一次微分

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\left(\frac{\pi}{\tau}\right)\frac{A}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)\prod\left(\left(\frac{t}{2\tau}\right)\right)$$







□ 三次微分

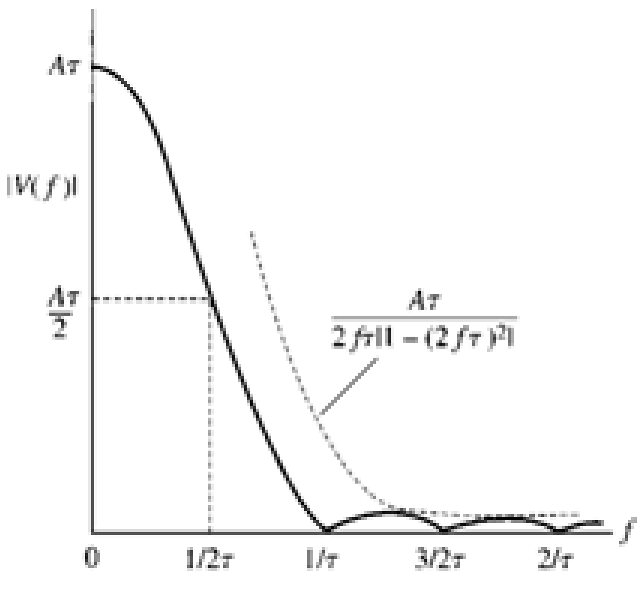
$$\frac{d^3v(t)}{dt^3}=\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^3\frac{A}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)\prod\left(\left(\frac{t}{2\tau}\right)\right)+\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2\delta(t+\tau)-\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2\delta(t-\tau)$$

□ 一次微分與三次微分之關係

$$\frac{d^3v(t)}{dt^3}=-\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2\frac{dv(t)}{dt}+\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2\delta(t+\tau)-\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2\delta(t-\tau)$$

FT

$$(j2\pi f)^3V(f)=-\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2(j2\pi f)V(f)+\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2\frac{A}{2}\left(e^{j2\pi ft}-e^{-j2\pi ft}\right)$$



□ 一次微分與三次微之頻譜關係

$$(j2\pi f)^3 V(f) = -\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 (j2\pi f)V(f) + \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 \frac{A}{2}\left(e^{j2\pi ft} - e^{-j2\pi ft}\right)$$

□ 整理得

$$V(f) = \frac{jA\sin(2\pi f\tau)}{j2\pi f + (\tau/\pi)^2 (j2\pi f)^3}$$

□ 化簡

$$V(f) = \frac{A\tau\sin(2f\tau)}{1-(2f\tau)^2}$$