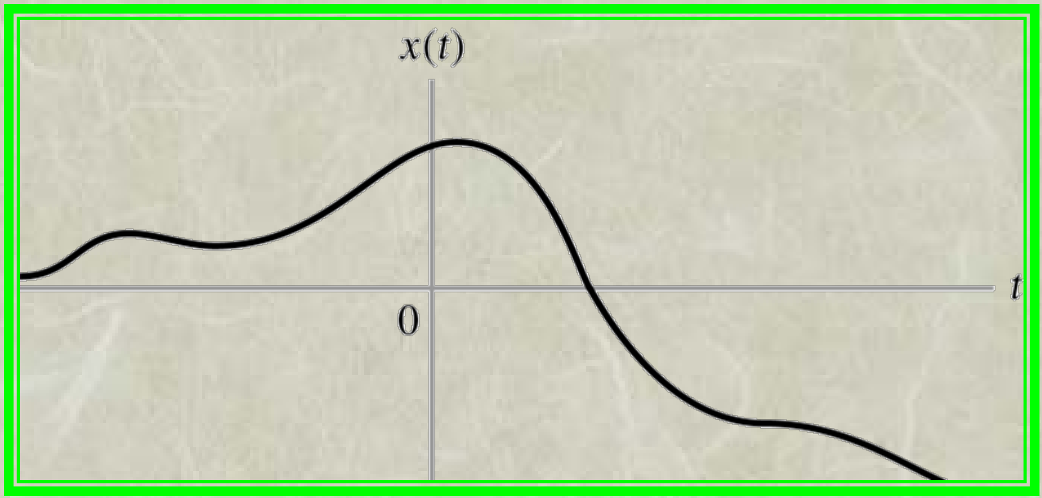
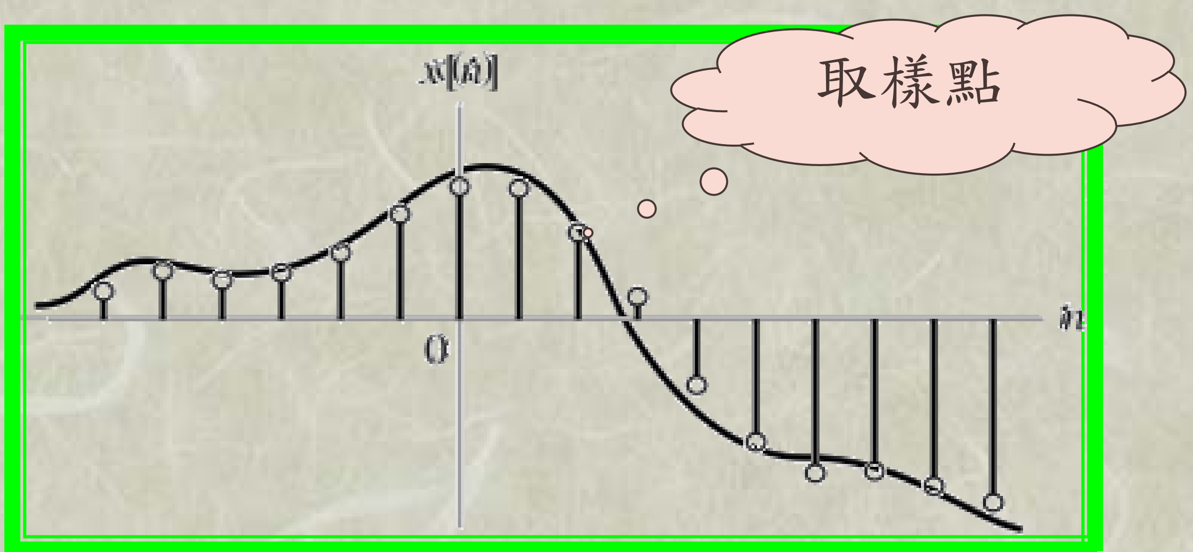
訊號分類

- **連續**與**離散**(continuous and discrete)
- **偶**與**奇** (even and odd)
- **週期**與**非週期**(Periodic and non-periodic)
- **決定**與**隨機**訊號(Deterministic and random)
- **功率**與**能量**(power and energy)
  - 下圖為常見之訊號: 屬於連續, 非奇非偶, 非週期且功率有限之隨機訊號



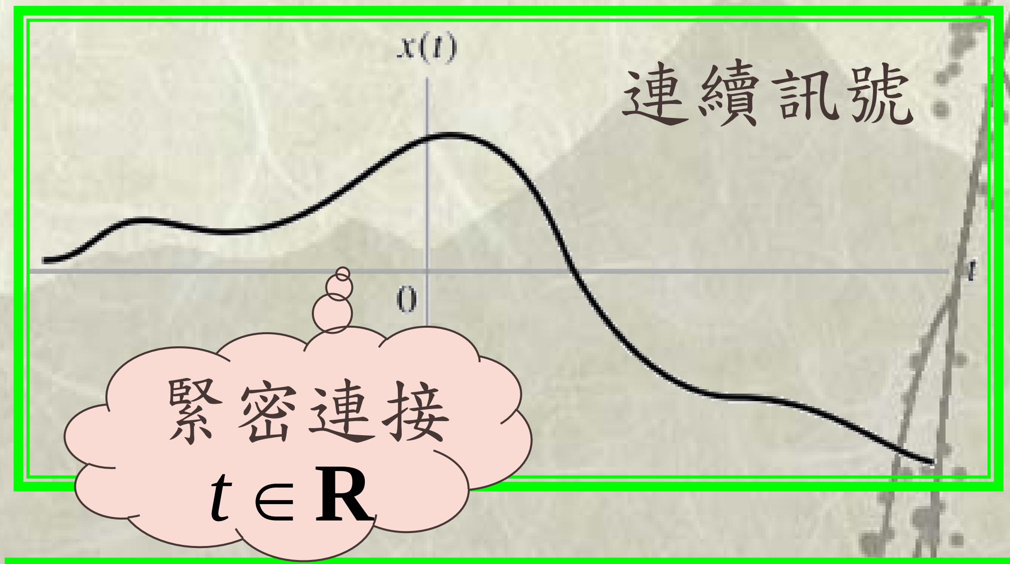
分類原理:連續與離散(continuous and discrete)

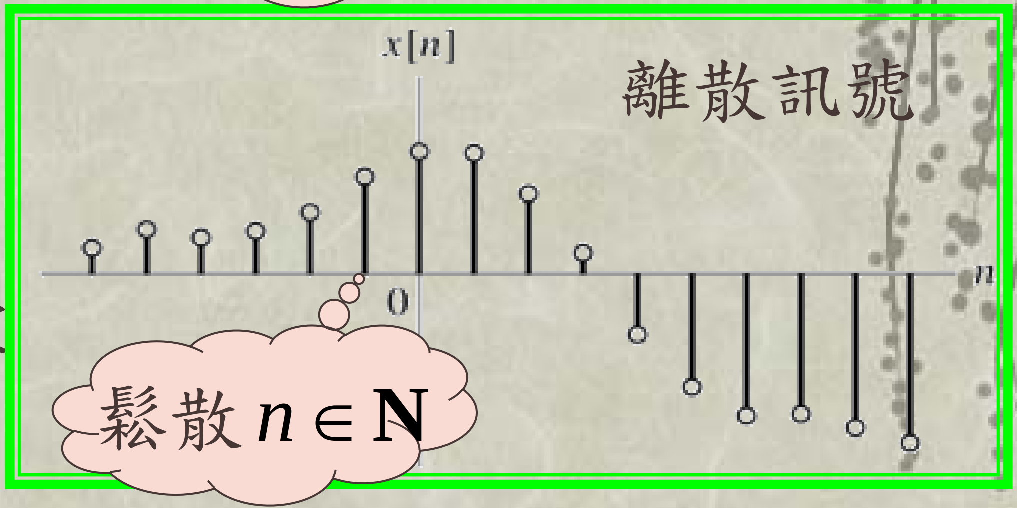
- 訊號之連續與離散是***依自變數(t:時間,x:空間)之定義域區分***
  - 連續: 以實數為定義域
  - 離散: 以整數為定義域
  - 一般離散訊號為連續訊號透過**取樣過程**產生的



連續與離散分類方法與步驟

1. 確認所要分辨之變數為何?(如:右上圖之t, 右下圖之n)
2. 圖:觀察其訊號點所在位置(緊密連接→連續, 否則為離散)
3. 方程式: 根據定義判斷





分類原理：偶與奇 (even and odd)

- 對稱(symmetric): Even signal : $x(-t) = x(t)$
- 反對稱(anti-symmetric):

  Odd signal : $x(-t) = -x(t)$
- 共軛對稱(conjugate symmetric): $x(-t) = x^*(t)$
- 任何訊號可以由偶訊號與奇訊號所組成

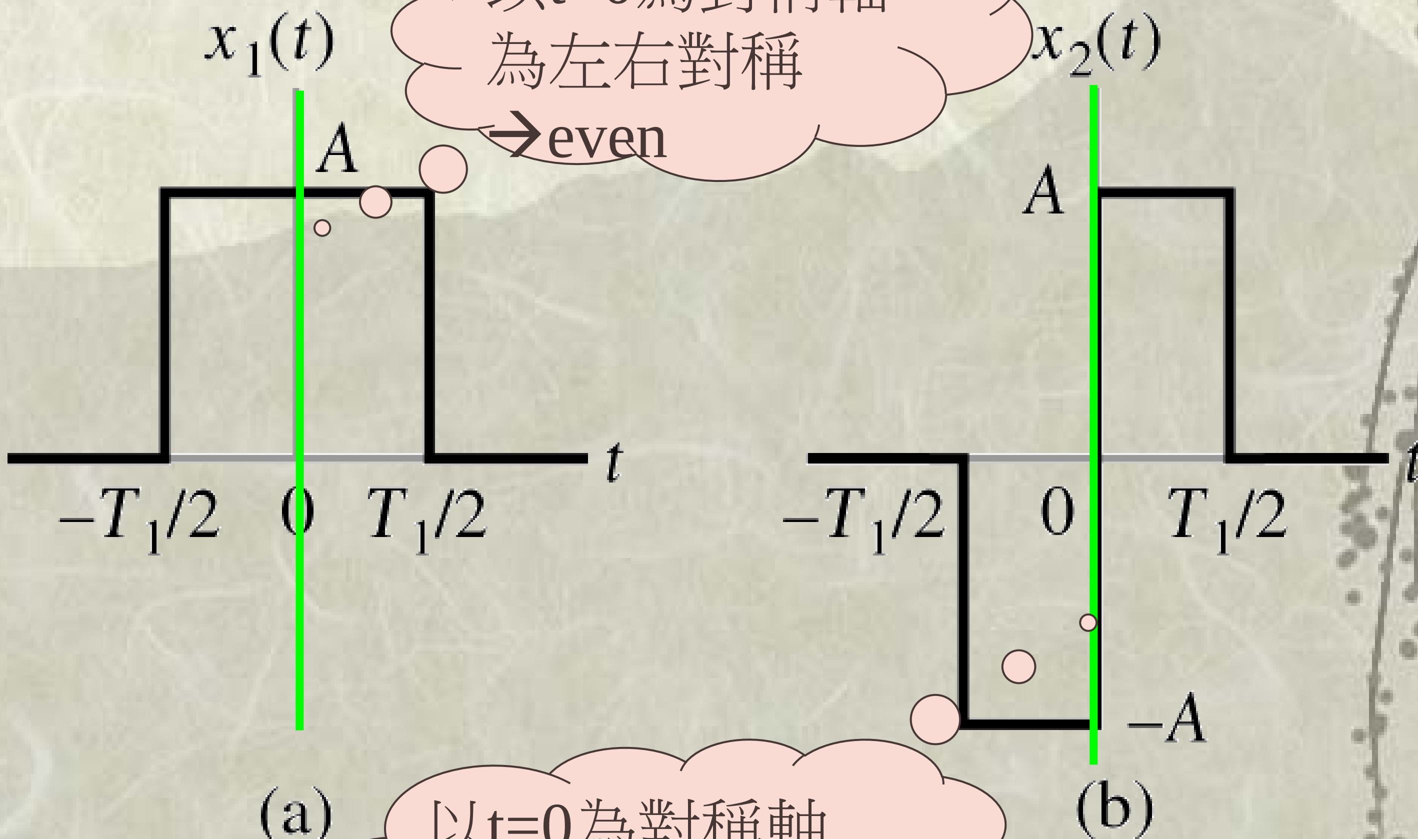
$$x(t) = x_{odd}(t) + x_{even}(t)$$

其中 $$x_{odd}(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]$$

$$x_{even}(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]$$

圖例示範：偶與奇 (even and odd)

以t=0為對稱軸
為左右對稱
→even



以t=0為對稱軸
為反對稱→odd

例題示範: p18

$$x(t)=\begin{cases}\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right), & -T\le t\le T\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

- 判斷$x(t)$為t之偶訊號或奇訊號?

1. 以-t代入原式之t

2. 證明

$$x(-t)=\begin{cases}\sin\left(\frac{-\pi t}{T}\right), & -T\le t\le T\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right), & -T\le t\le T\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

$$=-\begin{cases}\sin\left(\frac{-\pi t}{T}\right), & -T\le t\le T\\ 0, & otherwise\end{cases}=-x(t)$$

3. 為奇訊號

例題示範: p19

$$x(t) = e^{-2t}\cos t$$

- 計算$x(t)$之偶與奇訊號分量?
  1. 以$-t$代入原式之t

$$x(-t) = e^{2t}\cos(-t) = e^{2t}\cos(t)$$

  2.

$$x_{even}(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{-2t}\cos(t) + e^{2t}\cos(t)\right] = \cosh(2t)\cos(t)$$

$$x_{odd}(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{-2t}\cos(t) - e^{2t}\cos(t)\right] = -\sinh(2t)\cos(t)$$

分類原理：
週期與非週期(Periodic and non-periodic)

$$x(t) = x(t+T), \qquad \text{for all } t$$

- T為正常數,若 $T=T_0$滿足上式, 則$T=2T_0$, $3T_0$…. 也滿足, 滿足上式之最小$T=T_0$, 稱$x(t)$之主週期 (fundamental period)
- 頻率(frequency):

$$f = \frac{1}{T}, \qquad 單位\left(Hz = {cycle}/{\sec} = 次/秒 \right)$$

- 角頻率(angular frequency):

$$\varpi = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}, \qquad 單位\left({rad}/{\sec} = 徑/秒 \right)$$

週期與非週期分類方法與週期計算步驟

- 圖: 觀察波形是否有等間距重覆出現, 有為週期訊號, 重覆出現之最小時間為週期, 反之為非週期訊號
- 方程式:

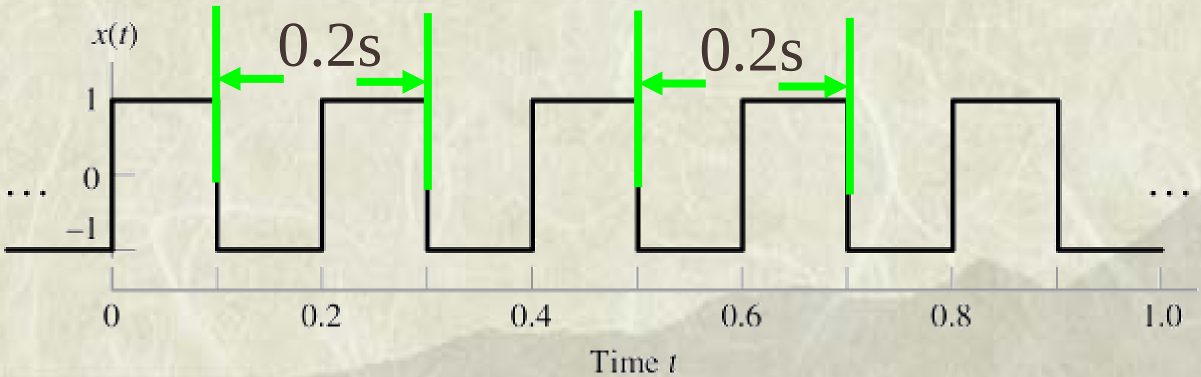
1. 連續訊號以 t=t+T , 代入原式之t, 離散訊號以 n=n+N,代入原式之n
2. 化簡後是否可得下式, 若可為週期, 否則為非週期

$$x(t) = x(t+T), \qquad \text{for all } t, T \in \mathbf{R}$$

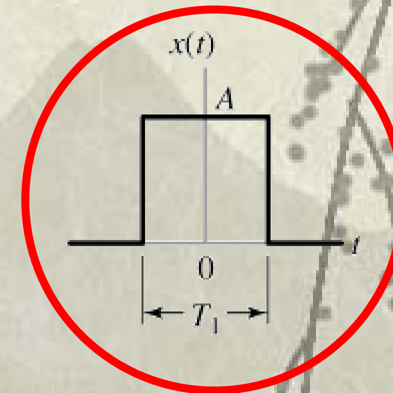
$$x[n] = x[n+N], \qquad \text{for all } n, N \in \mathbf{Z}$$

3. 最小之T or N , 為訊號之週期,<u>**離散訊號需N為整數**</u>

圖例示範: p21

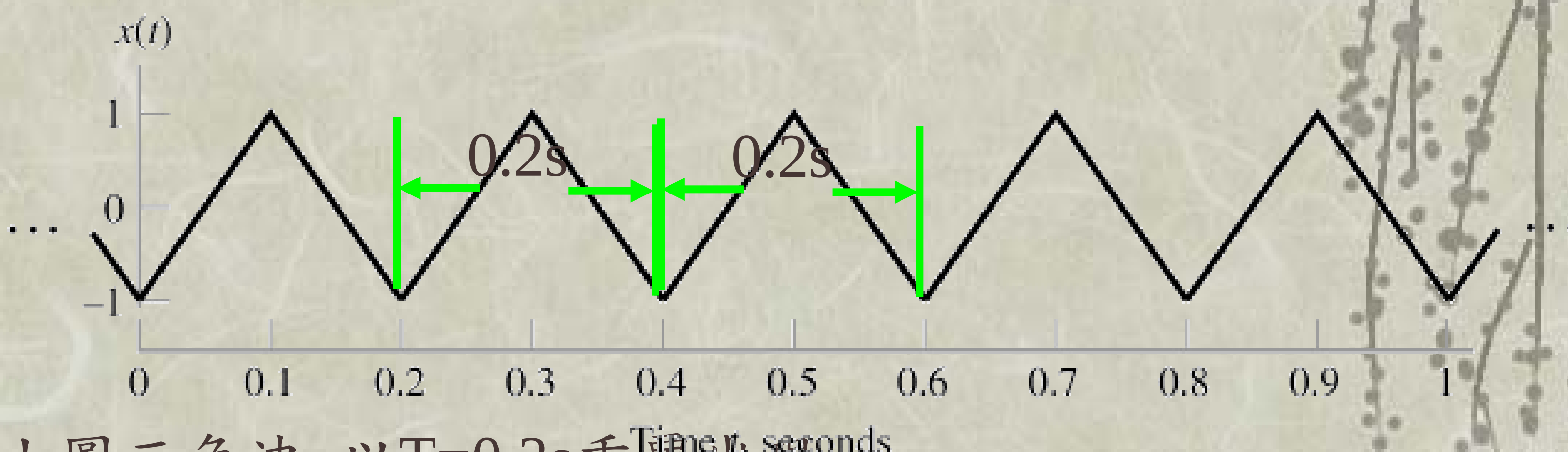


(a)



(b)

- (a) 為週期訊號, 以T=0.2s重覆出現
- (b) 只有一個方形波形, 非週期訊號



上圖三角波, 以T=0.2s重覆出現

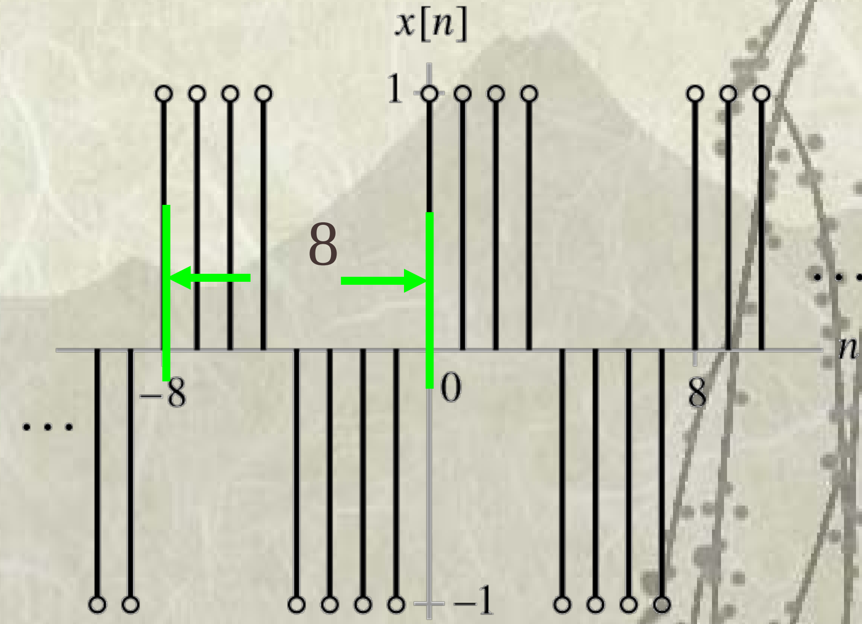
f=1/T=5Hz, $\varpi = 10\pi \ {}^{\text{rad}}\!/\!_{\text{s}}$

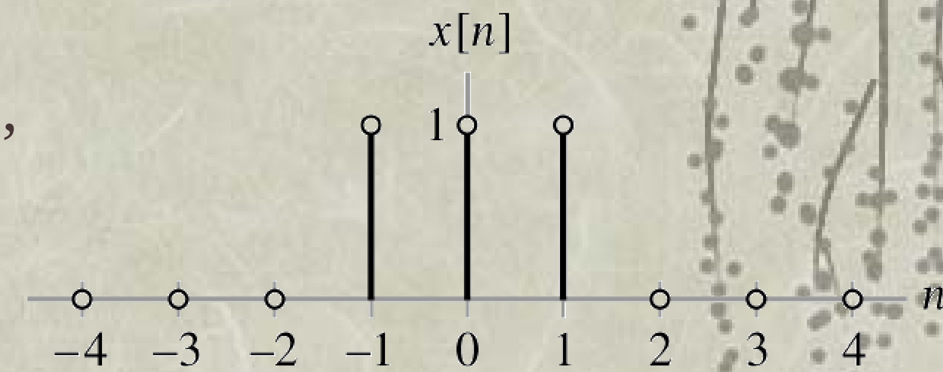
圖例示範: p22

- 為週期訊號, 4個1與四個-1 , 以N=8重覆出現
- 所以
- 週期 N=8
- 主頻率

$$\Omega = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{4}$$

- 右下圖, 只有三個1波形, 非週期訊號





例題示範: p22, problem 1.5

$(a)\ \ x(t)=\cos^2(2\pi t)$

$t=t+T$ 代入

$x(t+T)=\cos^2(2\pi(t+T))=\cos^2(2\pi(t+T)+n\pi)$

$$\cos^2(x)=\cos^2(x+n\pi)$$

若$2\pi(t+T)+n\pi=2\pi t, x(t)$為週期訊號

$\therefore T=0.5s$

$(c)\ \ x(t)=e^{-2t}\cos(2\pi t)$

$t=t+T$ 代入

$x(t+T)=e^{-2(t+T)}\cos(2\pi(t+T))=e^{-2T}e^{-2t}\cos(2\pi(t+T)+2n\pi)$

$$\cos(x)=\cos(x+2n\pi)$$

若$2\pi(t+T)+2n\pi=2\pi t,$

$x(t+T)=e^{-2T}x(t)\neq x(t),\therefore$ 為非週期訊號

例題示範: p22, problem 1.5

$(f)\ \ x[n]=\cos(2n)$

$n=n+N$ 代入

$x[n+N]=\cos(2(n+N))=\cos(2(n+N)+2m\pi)$

$$\cos(x)=\cos(x+2m\pi)$$

若$2(n+N)+2m\pi=2n, N=-m\pi, m\in\mathbf{Z}$

最小$N=\pi\notin\mathbf{Z}\therefore$為非週期

$(g)\ \ x[n]=\cos(2n\pi)$

$n=n+N$ 代入

$x[n+N]=\cos(2(n+N)\pi)=\cos(2(n+N)\pi+2m\pi)$

$$\cos(x)=\cos(x+2m\pi)$$

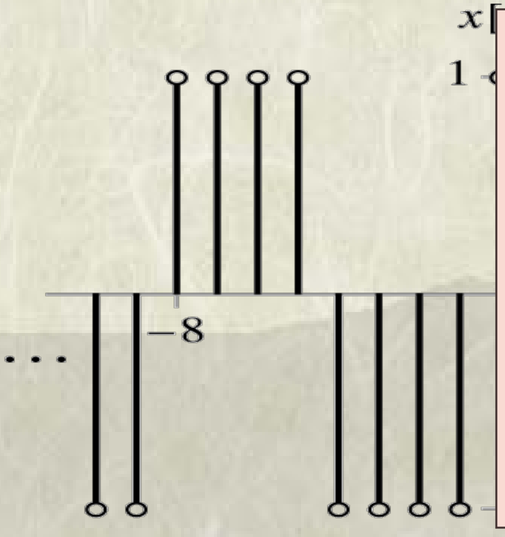
若$2(n+N)\pi+2m\pi=2n\pi, N=-m, m\in\mathbf{Z}$

最小$N=1\in\mathbf{Z}\therefore$為週期,　　$N=1$

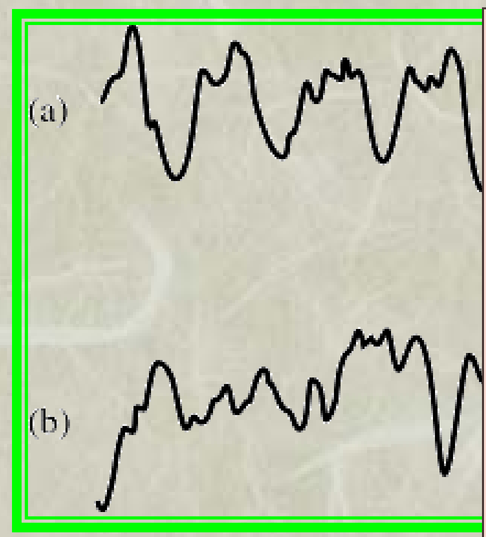
分類原理:
決定與隨機訊號(Deterministic and random)

- 決定訊號: 訊號波形中沒有不確定之因素, 稱決定訊號(deterministic signal)
- 隨機訊號:訊號波形在未被量測前為不確定,稱隨機訊號(random signal),
  - 一般物理界之量測訊號皆為隨機訊號
  - 產生隨機訊號之組合過程稱隨機過程(Random process)
  - 常見之熱雜訊也是一種隨機訊號, 是由無限多電子因熱隨機發射電磁訊號所組合成, 因其機率分佈一般為高斯(gauss)分佈, 稱高斯雜訊(gauss random noise)

決定與隨機訊號分類方法與步驟



未開始量測
你是否可預
測其訊號?



未開始量測
你是否可預
測其訊號?

- 左上圖可完全預測為四個1四個-1之重覆波形為→決定訊號
- 左下圖無法預測為→隨機訊號

replay

基本原理：功率與能量(power and energy)定義
(1)連續訊號 $x(t)$

- 一電訊號施加在電阻之瞬間功率(instantaneous power)

$$p(t)=\frac{v^2(t)}{R}, \quad or \qquad p(t)=Ri^2(t)$$

- 假設電阻為1, 可定義一般訊號$x(t)$之功率為

$$p(t)=x^2(t)$$

- 訊號能量定義如下:

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2}p(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)dt$$

- 平均功率　非週期　$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x^2(t)dt,$

週期訊號　$P=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x^2(t)dt$

基本原理：功率與能量(power and energy)定義(2)離散訊號x[n]

- 訊號能量定義如下:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n]$$

- 平均功率

非週期 $P = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N} \sum_{-N}^{N} x^2[n],$

週期訊號 $P = \frac{1}{N} \sum_{0}^{N-1} x^2[n]$

- <u>**連續訊號(積分)與離散訊號(和)**</u>

$$\int x(t)dt \xleftrightarrow[\text{上下限依實際情況轉換}]{} \sum x[n]$$

分類原理：功率與能量訊號定義

- 假設訊號$x(t)$之平均功率為P, 能量為E
- 若訊號能量為有限稱能量訊號(energy signal)

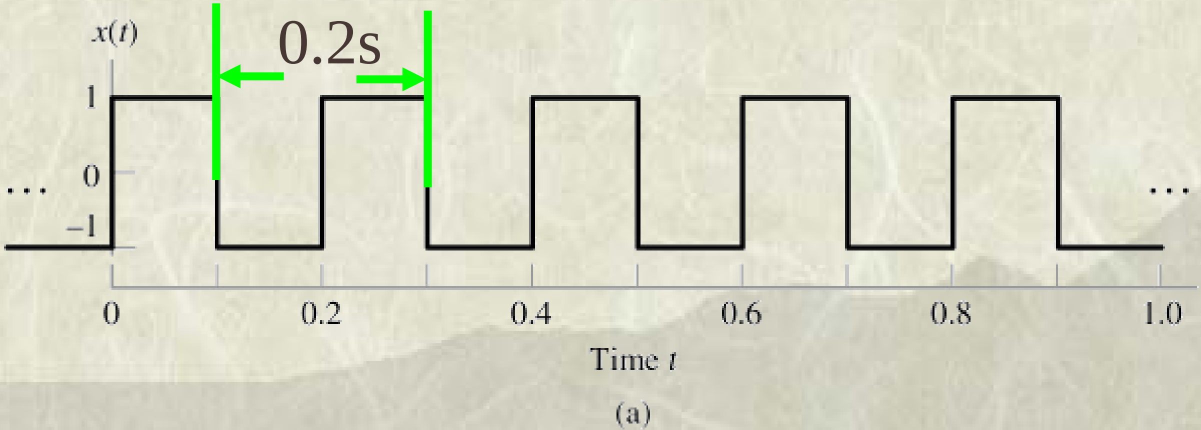
能量訊號 $0 \le E < \infty$

- 若平均功率為有限稱功率訊號(power signal), 一般週期訊號皆為功率訊號

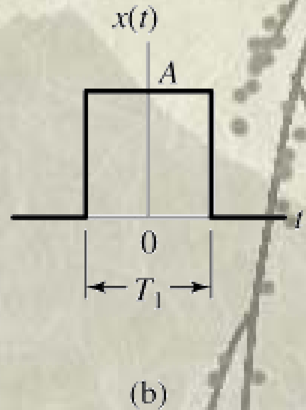
功率訊號 $0 \le P < \infty$

- 計算順序
  1. 以能量公式計算E, 判斷是否有限.
  2. 若E無限再計算P,判斷是否有限, 一般訊號若非能量訊號即為功率訊號

圖例示範: p21, Fig 1.14, Problem 1.6



(a)



(b)

- a)為週期訊號,

$$P=\frac{1}{0.2}\int_0^{0.2}x^2(t)dt=\frac{1}{0.2}\left\{\int_0^{0.1}(1)^2\,dt+\int_{0.1}^{0.2}(-1)^2\,dt\right\}=1$$

- b) 為非週期訊號, 先計算能量,為能量訊號

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)dt=\int_{-\tau_1/2}^{\tau_1/2}A^2dt=\tau_1A^2<\infty$$

例題示範: p25, Problem 1.9

- c) $x(t)=5\cos(\pi t)+\sin(5\pi t), -\infty<t<\infty$

  $x(t+T)=5\cos(\pi t+\pi T)+\sin(5\pi t+5\pi T)$

  週期訊號需$\pi T=2n\pi$且$5\pi T=2m\pi,\qquad T=2$

$$P=\frac{1}{2}\int_{-2/2}^{2/2}\left(5\cos(\pi t)+\sin(5\pi t)\right)^2 dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(25\cos^2(\pi t)+10\cos(\pi t)\sin(5\pi t)+\sin^2(5\pi t)\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_{-1}^{1}25\cos^2(\pi t)dt+\int_{-1}^{1}10\cos(\pi t)\sin(5\pi t)dt+\int_{-1}^{1}\sin^2(5\pi t)dt\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\{25+0+1\},\qquad \left(2\cos^2\theta=1-\cos(2\theta)\right)$$

$$=13$$

例題示範: p25, Problem 1.9

- f)

$$x[n]=\begin{cases}\sin(\pi n), & -4\le n\le 4\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$\because \forall n \rightarrow x[n]=0, \therefore P=0, E=0$$

- h)

$$x[n]=\begin{cases}\cos(\pi n), & 0\le n\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$P=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N}x^2[n]=\frac{1}{2N}\sum_{n=0}^{N}\cos^2(\pi n)=\frac{1}{2}$$