微 積分

Calculus

Dr. 陳 柏 頴

W 16 上課資料

Dec./24/2007

評 分 標 準

--- 對微積分之規定

- 期中考 **25 %**
- 隨堂考： 10x 2%=**20%**
- 出席率： **20%** 每次缺席扣 4%
- 出席率： 可兩次因故不到
- 小考: 4x5%=**20%**
- 期末考: 1x 25%= **25 %**

CH 4

導數的應用

微積分

第二學期

學習重點

1. 導數的應用 (Ch 4)
2. 不定積分與積分技巧 (Ch 3)
3. 定積分及其應用(Ch 5)
4. 級數與泰勒展開式 (Ch 6)
5. 多變數函數的微分與積分(Ch 7)

CH 4

章節概要

4.1函數之極值的意義

定義 4.1

設 D 為函數 f 的定義域。

(1) 若存在一個數 c 使得 $f(x) \le f(c),\ \forall x \in D$，則 f 在 $x = c$ 處具有**絕對極大值 (Absolute Maximum)** $f(c)$。

(2) 若在 D 中存在一個數 c 使得 $f(x) \ge f(c),\ \forall x \in D$，則 f 在 $x = c$ 處具有**絕對極小值 (Absolute Minimum)** $f(c)$。

註：絕對極大值可簡稱最大值，絕對極小值可簡稱最小值。

CH 4

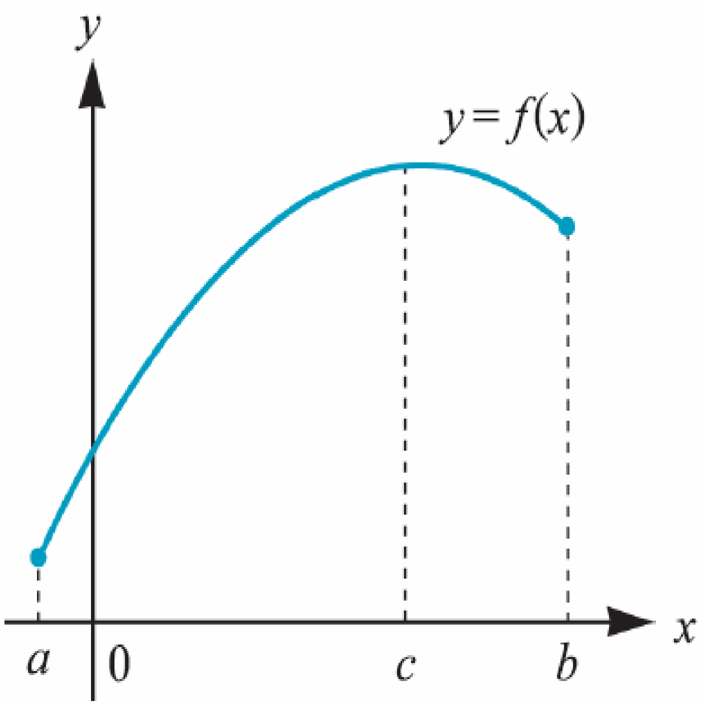

圖 4.1a

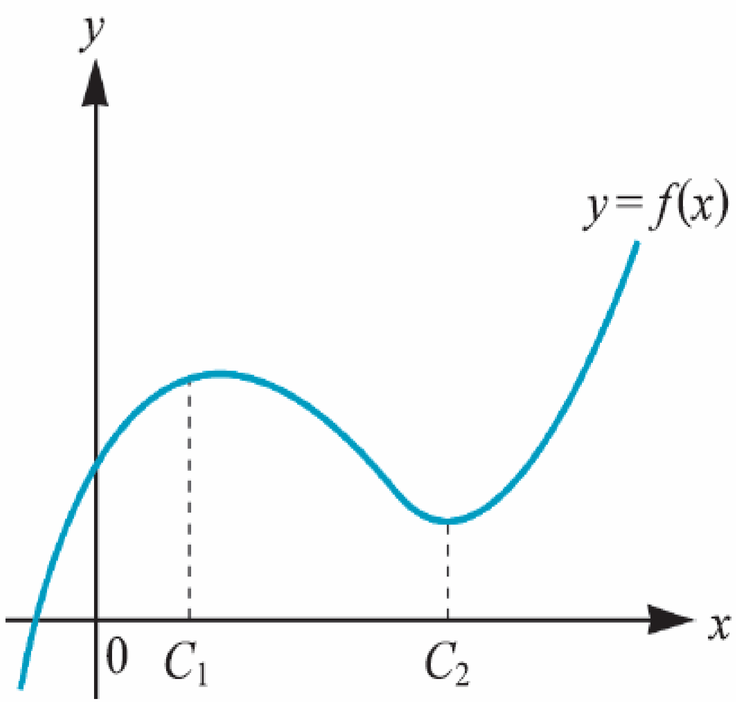

圖 4.1b

定理 4.1

若函數 f 在閉區間 $[a, b]$ 連續，則 f 在 $[a, b]$ 內具有最大值及最小值。

例題 1

(a) $f(x)=x^2-2x+2,\ 0\leq x\leq 3$。

因 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 連續，由上述定理知 f 在 $[0, 3]$ 內具有最大值及最小值。最大值爲 $f(3)=5$ 及最小值爲 $f(1)=1$。(圖 4.2a)

(b) $f(x)=\cos x,\ 0\leq x\leq \pi$。

因 f 在 $[0, \pi]$ 連續，故知 f 在 $[0, \pi]$ 內具有最大值及最小值。最大值爲 $f(0)=1$ 及最小值爲 $f(\pi)=-1$。(圖 4.2b)

CH 4

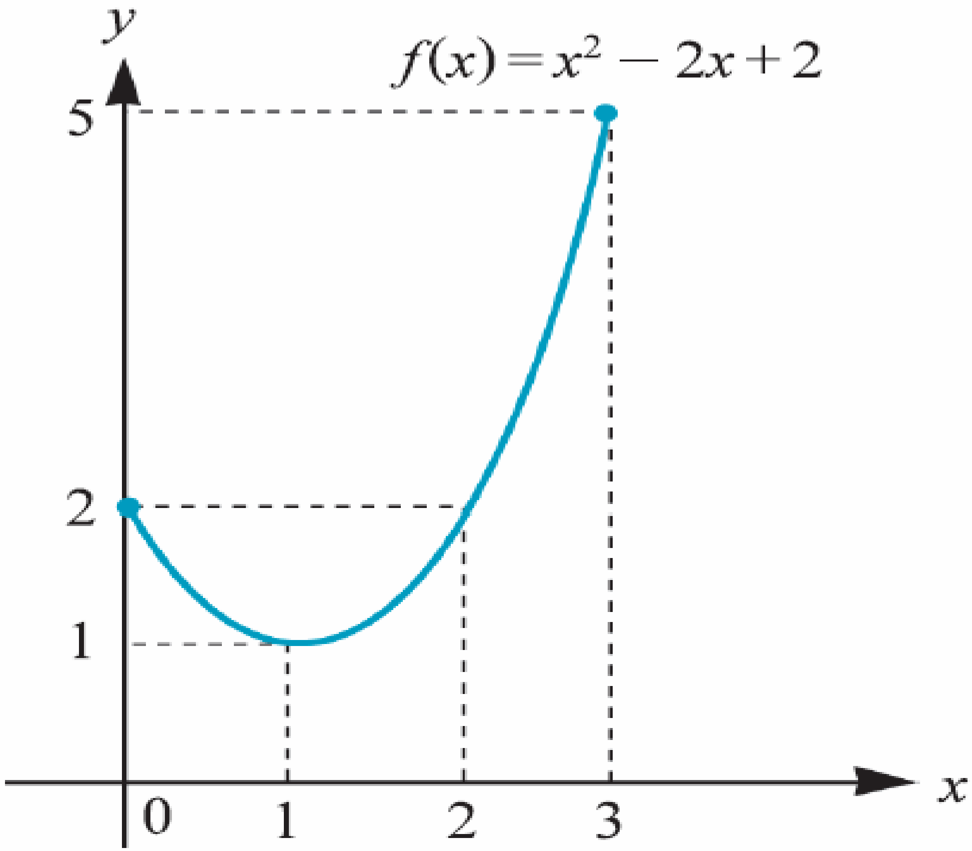

圖 4.2a

CH 4

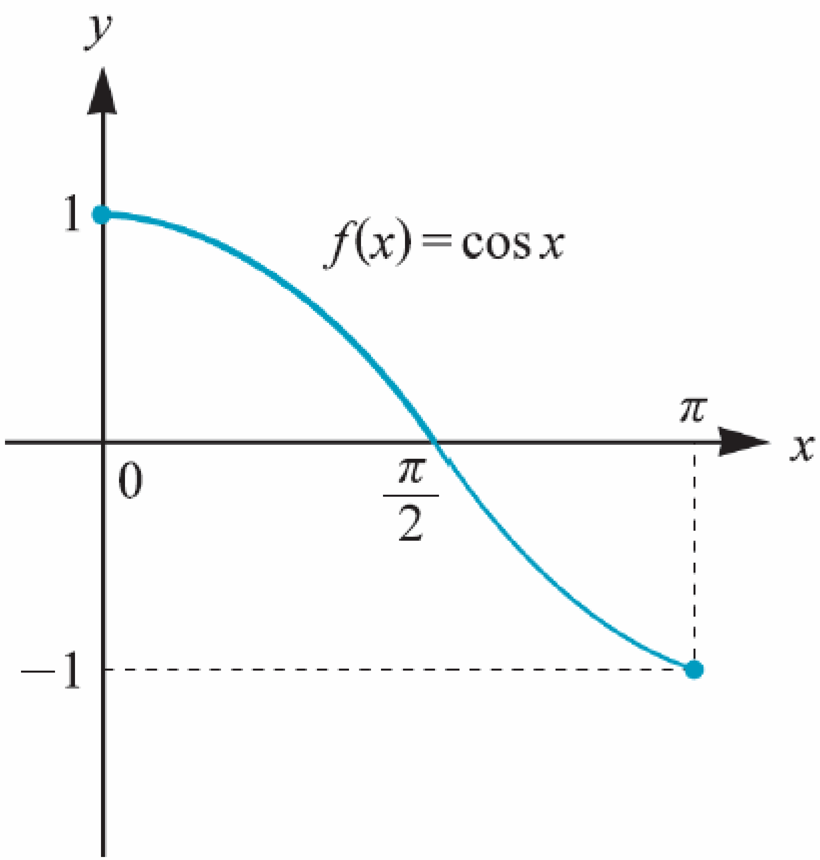

圖 4.2b

例題 2

(a) $f(x)=\ln x,\ 0<x\le e$，有最大值 $f(e)=1$ 但無最小值。(圖 4.3a)

(b) $f(x)=|x|,\ -1\le x<3$，有最小值 $f(0)=0$ 但無最大值。(圖 4.3b)

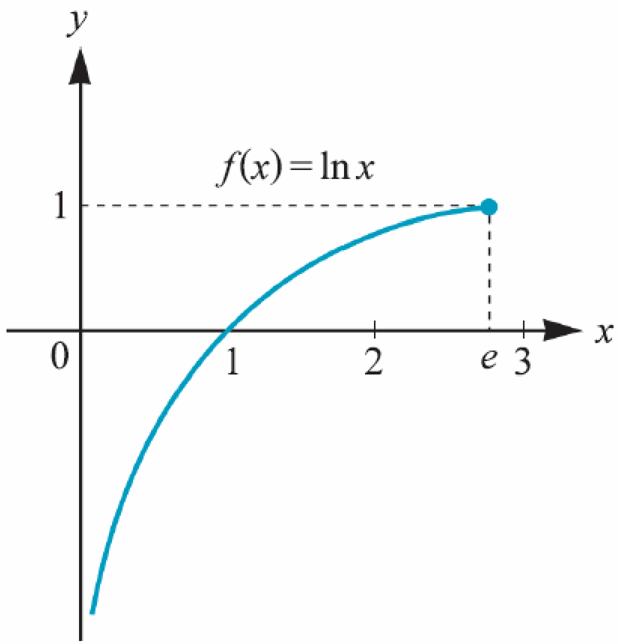

圖 4.3a

CH 4

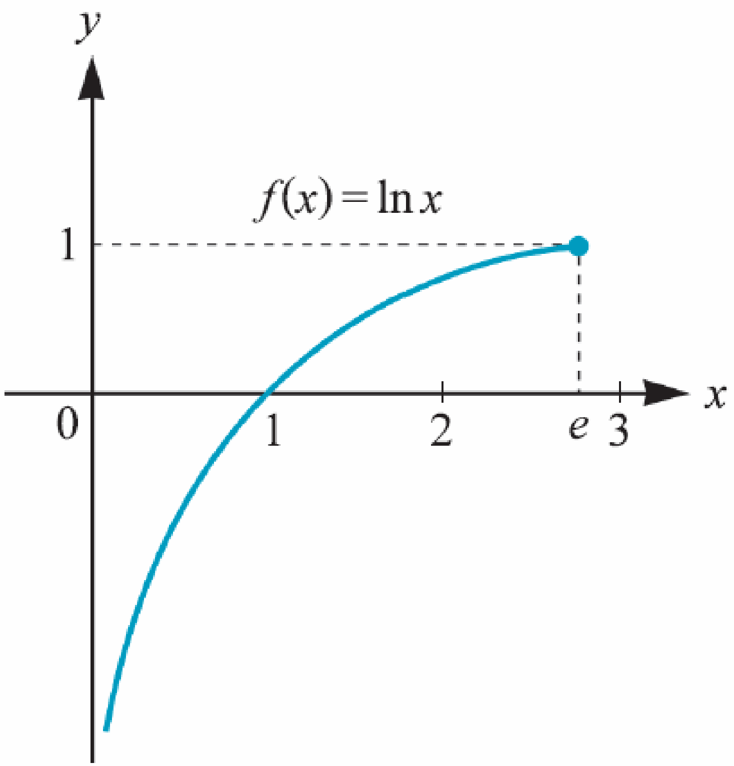

圖 4.3a

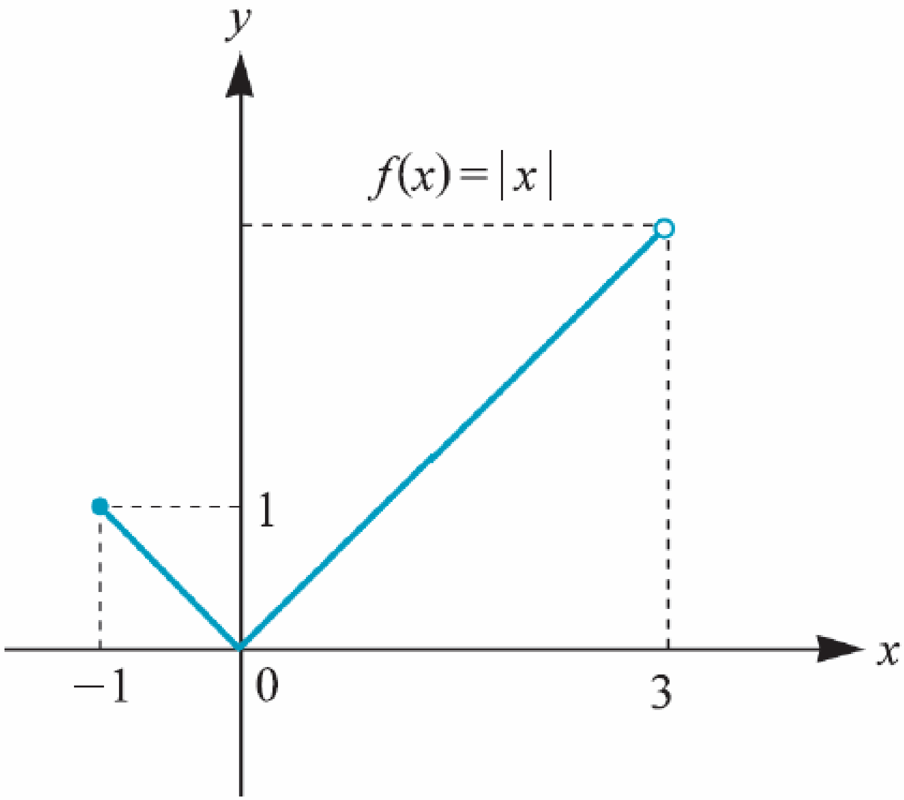

圖 4.3b

CH 4

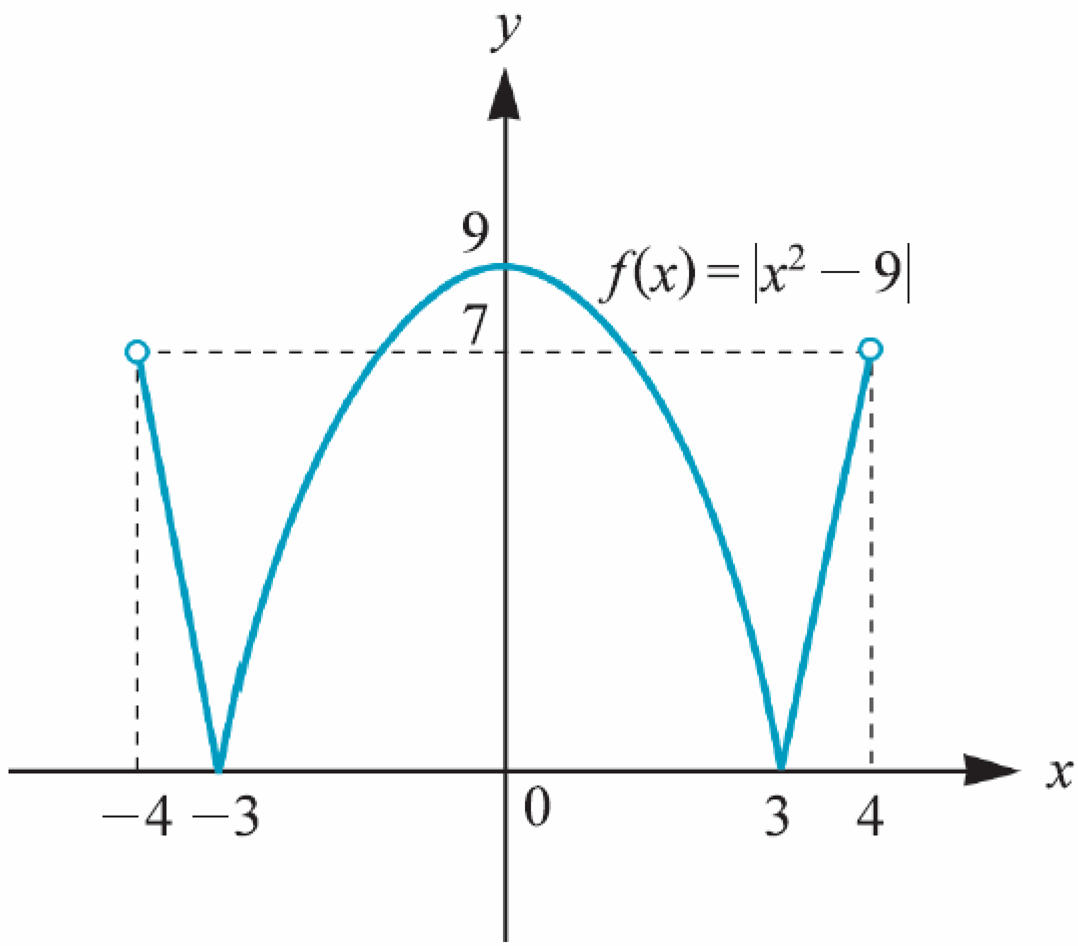

圖 4.4

CH 4

定理 4.2

設函數 f 定義於開區間 (a, b)，若 f 在 $x=c$ 處 $(a<c<b)$ 具有相對極值且導數 $f'(c)$ 存在，則 $f'(c)=0$。

證明： 我們分兩種情形：$f(c)$ 分別爲極大值和極小值。

首先假設 $f(c)$ 爲極大值。

由假設可知，

當 $a<x<c$ 時，$\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}>0$，

當 $c<x<b$ 時，$\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}<0$，

則 $f'_-(c)=\lim\limits_{x\to c^-}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0$，

且 $f'_+(c)=\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0$，

又知 $f'(c)$ 存在，即 $f'_-(c)=f'_+(c)=f'(c)$，可結論 $f'(c)=0$。

至於 $f'(c)$ 爲極小值的情形，請讀者自證之。

故此定理得證。

CH 4

定理 4.3 洛爾定理 (Rolle's Theorem)

設 f 在 $[a, b]$ 為連續函數，f 在 (a, b) 為可微分函數，且 $f(a)=f(b)$，則至少存在一個數 c 介於 a, b 之間，使得 $f'(c)=0$。

證明： 我們分爲兩種情形證明。

情形一：

若 f 爲一個常數函數，則 $f'(x)=0,\ a<x<b$，因此，介於 a, b 之間的任意數均可爲定理所述之 c。

情形二：

若 f 不爲常數函數，則依定理 4.1 知 f 必具有最大值及最小值。而最大值及最小值必分別是極大值及極小值。

CH 4

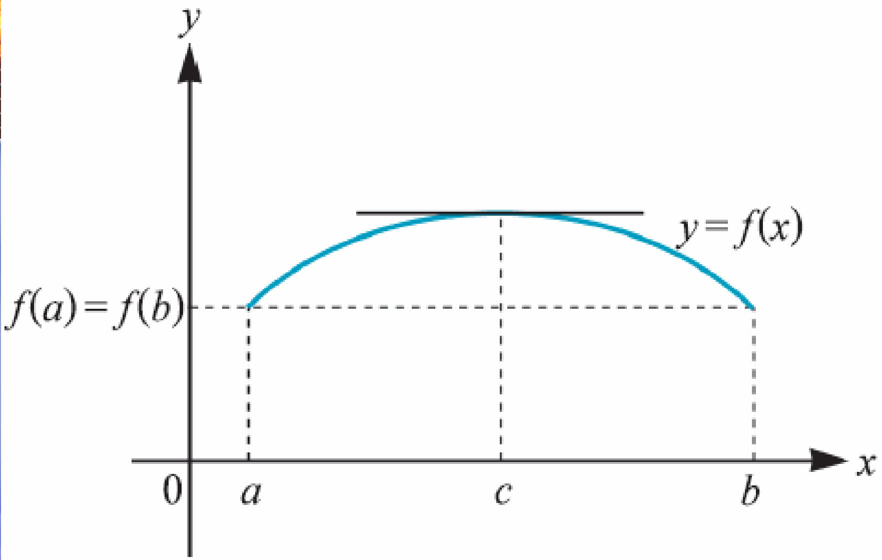

圖 4.5a

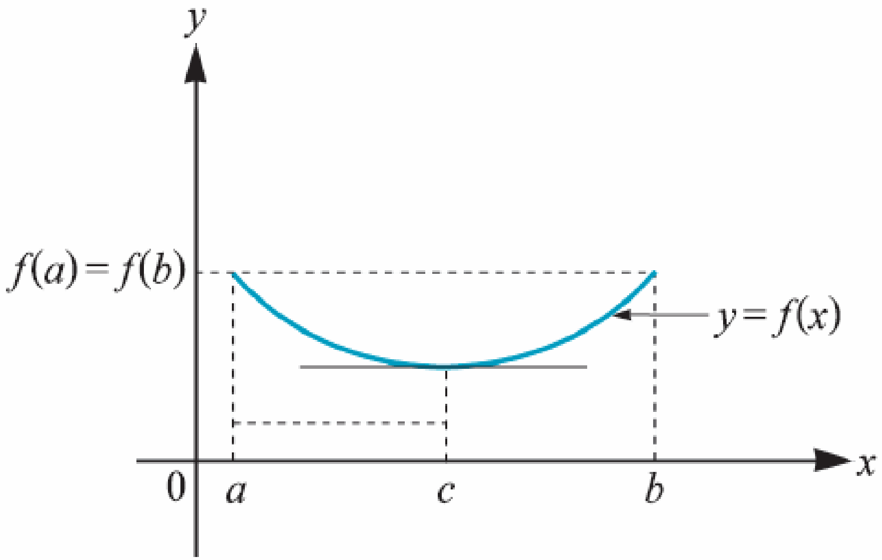

圖 4.5b

定理 4.4 均值定理 (Mean-value Theorem)

若函數 f 在 $[a, b]$ 爲連續函數且在 (a, b) 爲可微分函數，則必至少存在一個數 c 介於 a, b 之間，使得

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}。$$

證明：因過函數 f 圖形上兩點 $(a, f(a))$ 及 $(b, f(b))$ 之直線 L 的方程式為：

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) \text{。} \qquad (1)$$

則 (1) 式在 $[a, b]$ 爲連續函數，在 (a, b) 爲可微分函數。

現在，定義 (圖 4.6)

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)\text{。} \qquad (2)$$

由於已知函數 f 及直線 L 在 $[a, b]$ 爲連續函數和在 (a, b) 爲可微分函數，故 g 也必在 $[a, b]$ 爲連續函數和在 (a, b) 爲可微分函數。檢視 $g(a)$ 及 $g(b)$，我們得到

$$g(a) = g(b) = 0\text{。}$$

綜合上述知 g 滿足洛爾定理之各條件，故必存在一個數 c 介於 a 和 b 之間，使得 $g'(c)=0$。

又由 (2) 知道

$$g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

所以 $g'(c)=0$，也就是

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

則
$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

故定理得證。

CH 4

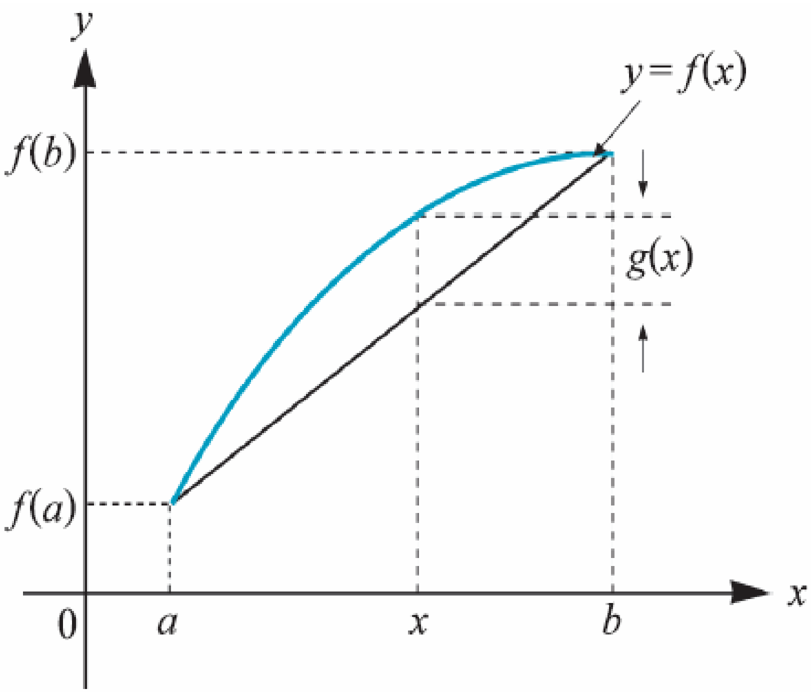

圖 4.6

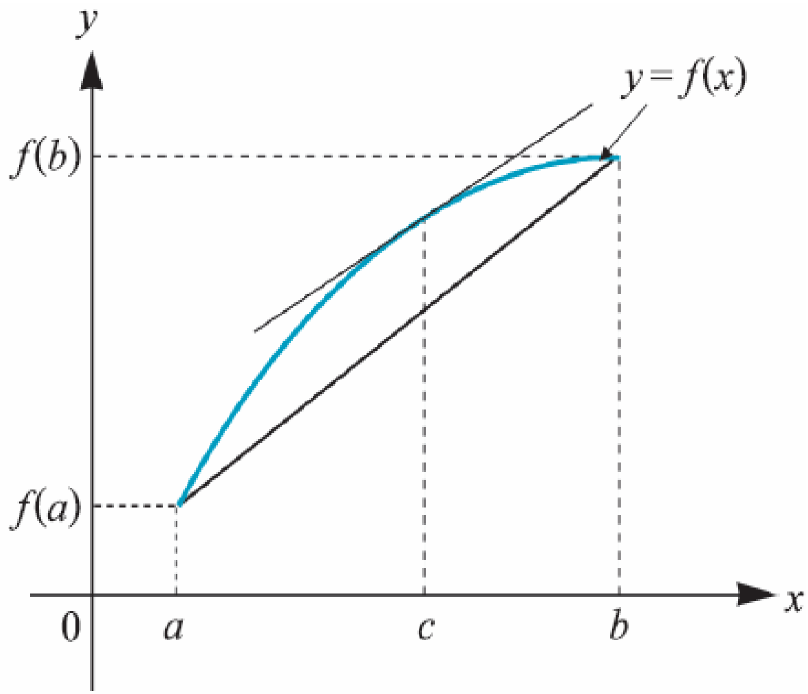

圖 4.7

例題 3

設 $f(x)=x^2-2x+2,\ x\in[0,\ 3]$。求 (a) 滿足均值定理的 c 值；(b) 過 $(c,\ f(c))$ 之切線方程式。

解 (a) 由於 f 是一個多項式函數，所以 f 在 $[0, 3]$ 為連續且在 $(0, 3)$ 為可微分函數。利用均值定理知存在一個數 c 介於 0, 3 之間，使得

$$f'(c)=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}。$$

但 $f(3)=5$，$f(0)=2$，且 $f'(x)=2x-2$，

則由 $2c-2=\dfrac{5-2}{3-0}=1$，

得 $c=\dfrac{3}{2}\in(0, 3)$ 為所求。

(b) 由 (a) 知 $c=\frac{3}{2}$，

因此 $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}-2\cdot\frac{3}{2}+2=\frac{5}{4}$，

且 $f'\left(\frac{3}{2}\right)=2\cdot\frac{3}{2}-2=1$，

故過 $\left(\frac{3}{2},\frac{5}{4}\right)$ 之切線方程式為

$y-\frac{5}{4}=1\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)$，

$y-\frac{5}{4}=x-\frac{3}{2}$，

即 $4x-4y=1$。

4.2函數的增減性及極值

定義 4.3

設 f 定義於區間 I。x_1, x_2 爲區間 I 內任意兩點且 $x_1 < x_2$。

(1) 若 $f(x_1) < f(x_2)$，則 f 在區間 I 爲**增函數** (Increasing Function)。

(2) 若 $f(x_1) > f(x_2)$，則 f 在區間 I 爲**減函數** (Decreasing Function)。

區間 I 在上述各種情況分別稱爲遞增、遞減區間。

CH 4

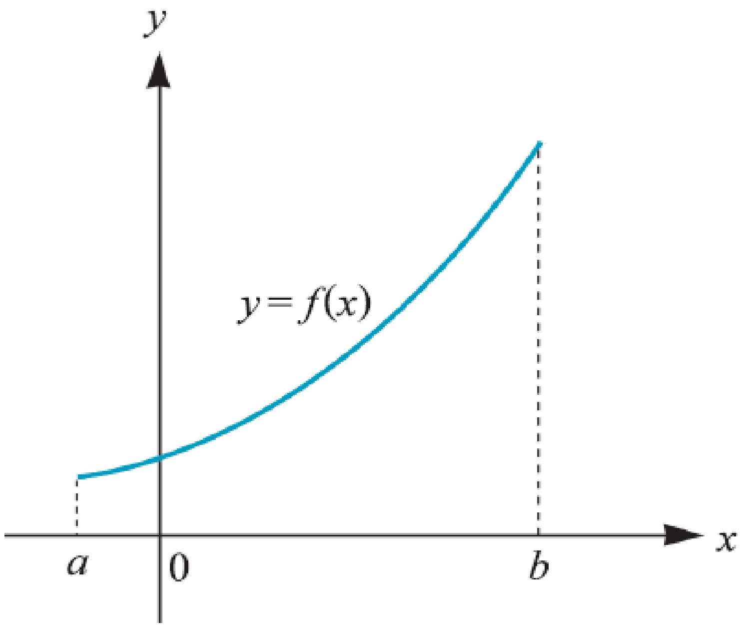

圖 4.8a

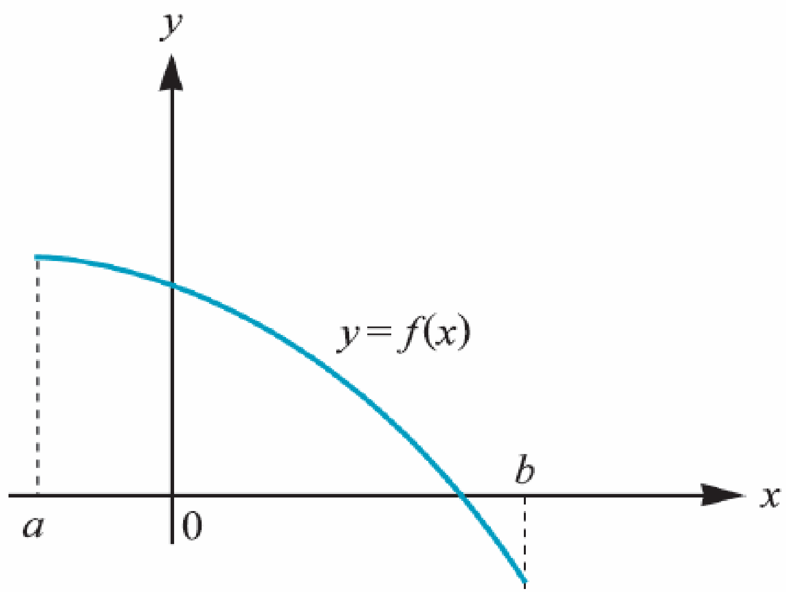

圖 4.8b

定理 4.5 增減性的判別

對於任意 $x \in (a, b)$，$f'(x)$ 均存在。

(1) 若 $f'(x) > 0,\ a < x < b$，則 f 在 (a, b) 為增函數。

(2) 若 $f'(x) < 0,\ a < x < b$，則 f 在 (a, b) 為減函數。

(3) 若 $f'(x) = 0,\ a < x < b$，則 f 在 (a, b) 為常數函數。

證明： 我們先證明 (1)：

設 x_1, x_2 為 (a, b) 內滿足 $a<x_1<x_2<b$ 之任意兩數，我們證明 $f(x_1)<f(x_2)$。

由已知 f 在 (a, b) 之導數存在，所以 f 在 (a, b) 為連續函數。

因此 f 在 (a, b) 為連續函數且在 (x_1, x_2) 導數存在。

依照均值定理及已知 $f'(x)>0, a<x<b$，可以確定必存在一數 c，$x_1<c<x_2$，使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)>0 \text{。}$$

則 $f(x_2)-f(x_1)>0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

故 (1) 得證。

(2) 之證明與 (1) 之證明類似，請讀者自證之。

(3) 之證明：

設 x_1, x_2 為 (a, b) 內滿足 $a<x_1<x_2<b$ 之任意兩數，我們要證明 $f(x_1)=f(x_2)$。

由已知 f 在 (a, b) 之導數存在，所以 f 在 (a, b) 為連續函數。

因此 f 在 $[x_1, x_2]$ 爲連續函數且在 (x_1, x_2) 導數存在。依照均值定理及已知 $f'(x)=0,\ a<x<b$，可以確定必存在一數 c，$x_1<c<x_2$，使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)=0\text{，}$$

則 $f(x_2)-f(x_1)=0$，即 $f(x_1)=f(x_2)$，

故 (3) 得證。

例題 1

討論下列各函數在哪些區間爲增函數、減函數：

(a) $F(x)=\sin x$；(b) $G(x)=x^2$；(c) $H(x)=|x^2-1|$。

解

(a) 因 $F'(x)=\cos x$，可知

當 $x=2n\pi\pm\theta$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$n=0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$，

$F'(x)>0$，則 $F(x)=\sin x$ 為增函數；

其他情形，

$F'(x)<0$，則 $F(x)=\sin x$ 為減函數。

(b) 由 $G'(x)=2x$，可知

$x>0$ 時，$G(x)=x^2$ 為增函數；

$x<0$ 時，$G(x)=x^2$ 為減函數。

(c) 由 $H'(x)=\dfrac{x^2-1}{|x^2-1|}\cdot 2x$，可知

$H'(x)>0$ 時，$-1<x<0$ 或 $x>1$；

$H'(x)<0$ 時，$x<-1$ 或 $0<x<1$。

因此

當 $-1<x<0$ 或 $x>1$，$H(x)$ 為增函數；

當 $x<-1$ 或 $0<x<1$，$H(x)$ 為減函數。

定義 4.4

設 c 爲函數 f 之定義域內一數。若 f 在 c 處之導數不存在或 $f'(c)=0$，則 c 爲 f 之一個**臨界點**。

例題 2

設函數 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$，求其臨界點。

解

當 $x \neq 0$，$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x^2}$。

令 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$，

則 $x = -1$，1 為 $f(x)$ 的臨界點。

註：上例中雖然 f 在 0 處導數不存在，但由於 0 不屬於定義域，故 0 不算是臨界點。

例題 3

求 $f(x)=(2x-5)\sqrt{x-1}$ 之臨界點。

解

因 $f'(x)=\dfrac{3(2x-3)}{2\sqrt{x-1}}$，

當 $x=\dfrac{3}{2}$，$f'(x)=0$，且 $x=1$ 時，$f'(1)$ 不存在，

則 $x=1, \dfrac{3}{2}$ 為 $f(x)$ 之臨界點。

例題 4

試討論 $f(x)=3x^2-2x^3$ 在何區間爲增函數、減函數。

解 因 $f'(x)=6x-x^2=-6x(x-1)$。

令 $f'(x)=0$，得 $x=0, 1$，

則 $x=0, 1$ 為 $f(x)$ 的臨界點。

將 f 的定義域分為 $(-\infty, 0), (0, 1), (1, \infty)$ 三個區間。

f 的增減性可經由下表討論之：

x	$x<0$	$0<x<1$	$1<x$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
f	減函數	增函數	減函數

由表中，我們知道 f 在 $(-\infty, 0), (1, \infty)$ 為減函數，f 在 $(0, 1)$ 為增函數。

定理 4.6

若 f 在 $x=c$ 處具有相對極值，則 c 必為 f 之一臨界點 (即 $f'(c)=0$ 或 f 在 c 處之導數不存在)。

證明：已知 f 在 c 處有極值。

(1) 若 f 在 $x=c$ 處導數不存在，則 c 為一臨界點。

否則

(2) $f'(c)$ 存在，則利用定理 3.3 知 $f'(c)=0$，

故定理得證。

例題 5

分別求函數 (a) $f(x)=(x-1)^3$；及 (b) $g(x)=1-x^{\frac{1}{3}}$ 之臨界點，並說明其函數值並不是極值。

解 (a) 因 $f'(x)=3(x-1)^2$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$，

所以 $x=1$ 為 $f(x)$ 的臨界點。

當 $x<1$ 時，$f(x)=(x-1)^3<0=f(1)$；

$x>1$ 時，$f(x)=(x-1)^3>0=f(1)$，

故知 $f(1)$ 並不是 $f(x)$ 的極值。(圖 4.10)

(b) 因 $g'(x)=-\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=-\dfrac{1}{3x^{2/3}}$，

在 $x=0$ 時，$g'(0)$ 不存在，

所以 $x=0$ 為 $g(x)$ 的臨界點。

當 $x<0$ 時，$g(x)=1-x^{1/3}>1=g(0)$；

$x>0$ 時，$g(x)=1-x^{1/3}<1=g(0)$，

故知 $g(0)$ 並不是極值。(圖 4.11)

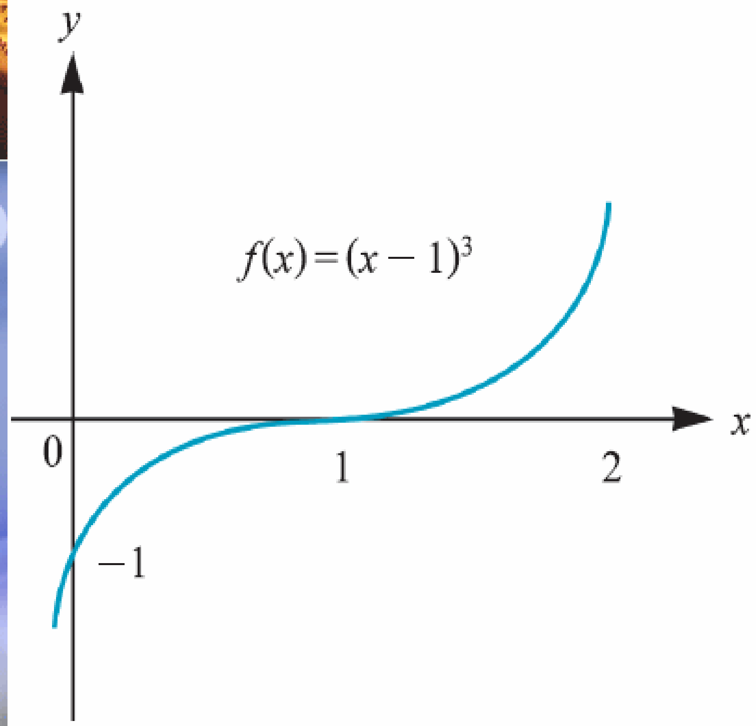

圖 4.10 1 為臨界點，但無極值

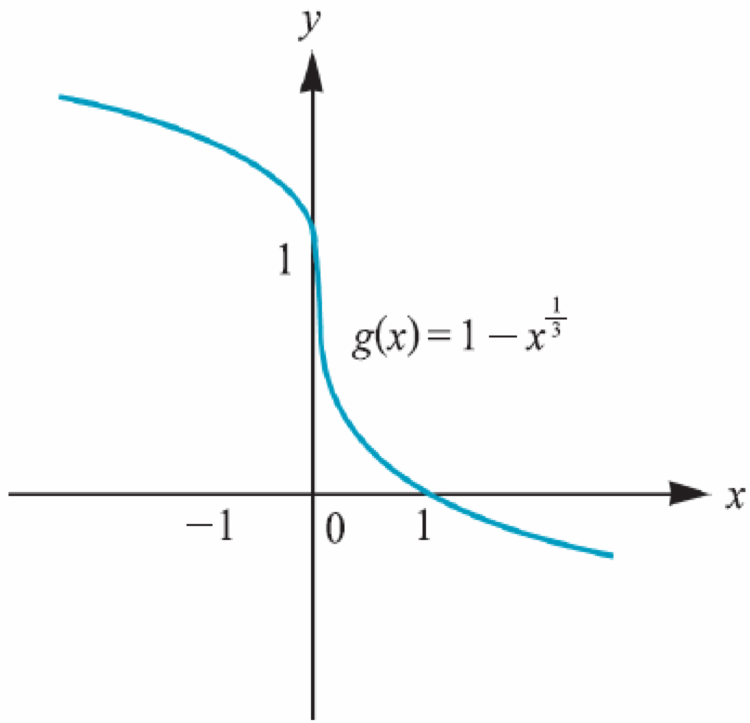

圖 4.11 0 為臨界點，但無極值

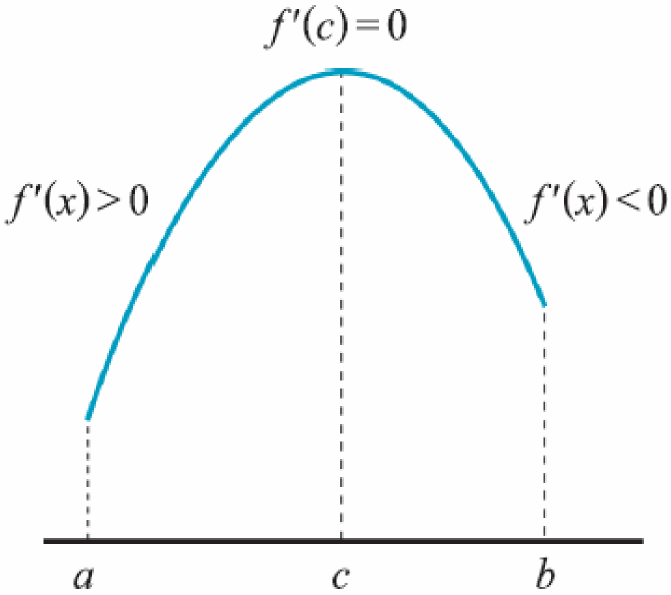

圖 4.12 左增右減，在 c 處有極大值

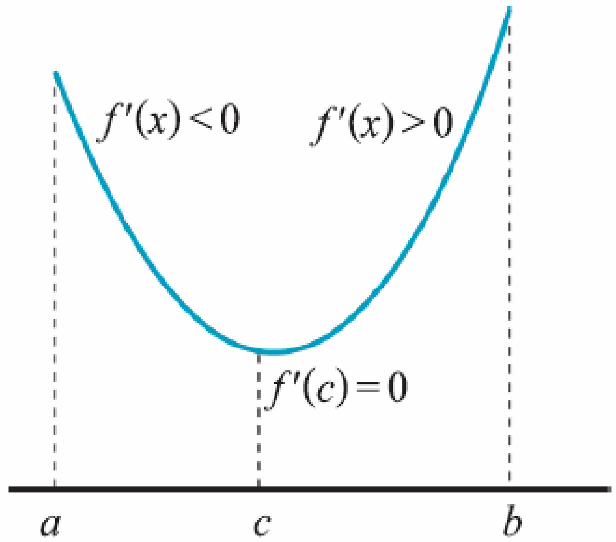

圖 4.13 左減右增，在 c 處有極小值

定理 4.7 (極值) 一階導數判別法

設 c 為函數 f 的一個臨界點，且 (a, b) 包含 c 的一個區間。

(1) 若當 $a<x<c$ 時，$f'(x)>0$；且當 $c<x<b$ 時，$f'(x)<0$，則 f 在 $x=c$ 處具極大值 $f(c)$。

(2) 若當 $a<x<c$ 時，$f'(x)<0$；且當 $c<x<b$ 時，$f'(x)>0$，則 f 在 $x=c$ 處具極小值 $f(c)$。

(3) 若當 $a<x<b$ 且 $x \neq c$ 時，$f'(x)$ 具同一性質符號，則 f 在 $x=c$ 處不具極值。

例題 6

試討論 $f(x)=x+\dfrac{1}{x},\ x\neq 0$ 的極值。

解　由例題 1 知 $x=\pm 1$ 為 $f(x)$ 的臨界點。而且

當 $x<-1$ 時，$f'(x)>0$；且當 $-1<x<0$ 時，$f'(x)<0$，則 f 在 $x=-1$ 處具極大值 $f(-1)=-2$。

當 $0<x<1$ 時，$f'(x)<0$；且當 $1<x$ 時，$f'(x)>0$，則 $f(x)$ 在 $x=10$ 處具極小值 $f(1)=2$。(圖 4.14)

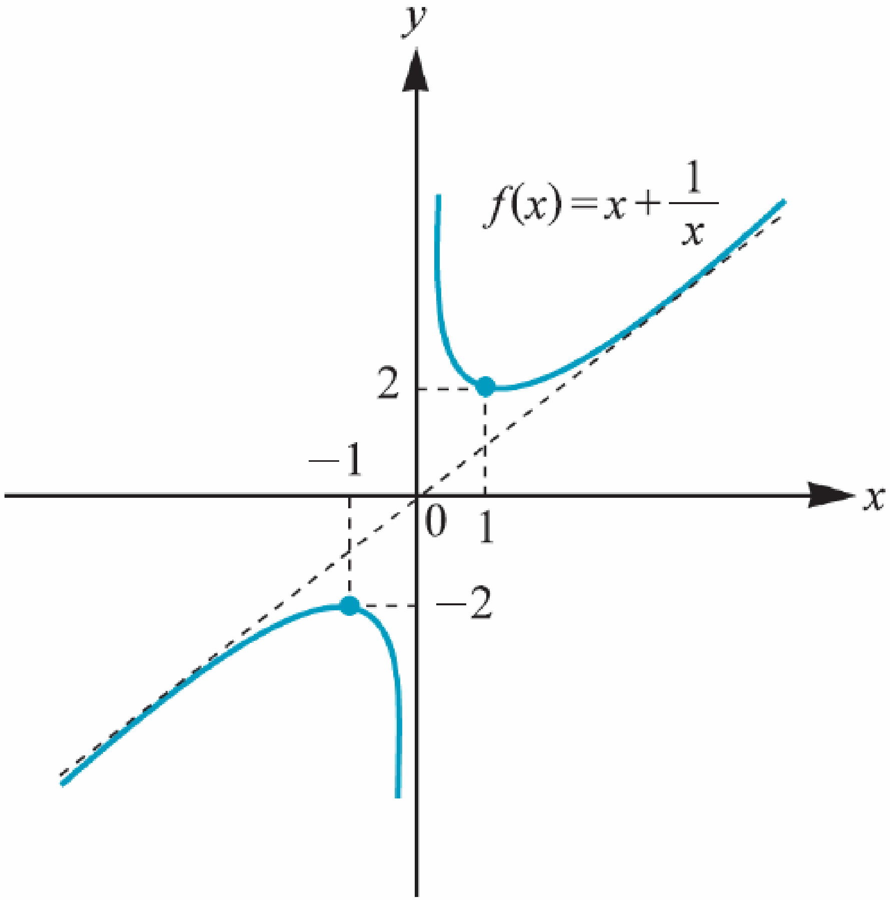

圖 4.14 $f(-1)=-2$ 為極大；$f(1)=2$ 為極小

CH 4

例題 7

試討論 $f(x)=x^3-6x^2+9x+5$ 的極值。

解　因 $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=1, 3$，

所以 $x=1, 3$ 為 $x=f(x)$ 的臨界點。

現將 $f(x)$ 之定義域 $(-\infty, \infty)$ 分為 $(-\infty, 1), (1, 3)$ 和 $(3, \infty)$ 三個區間討論 $f(x)$ 的增減性。

x	$x<1$	$1<x<3$	$3<x$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
f	增函數	減函數	增函數

由上表的結果，依定理 4.7 知：

$f(x)$ 在 $x=1$ 處具極大值 $f(1)=9$，

在 $x=3$ 處具極小值 $f(3)=5$。(圖 4.15)

CH 4

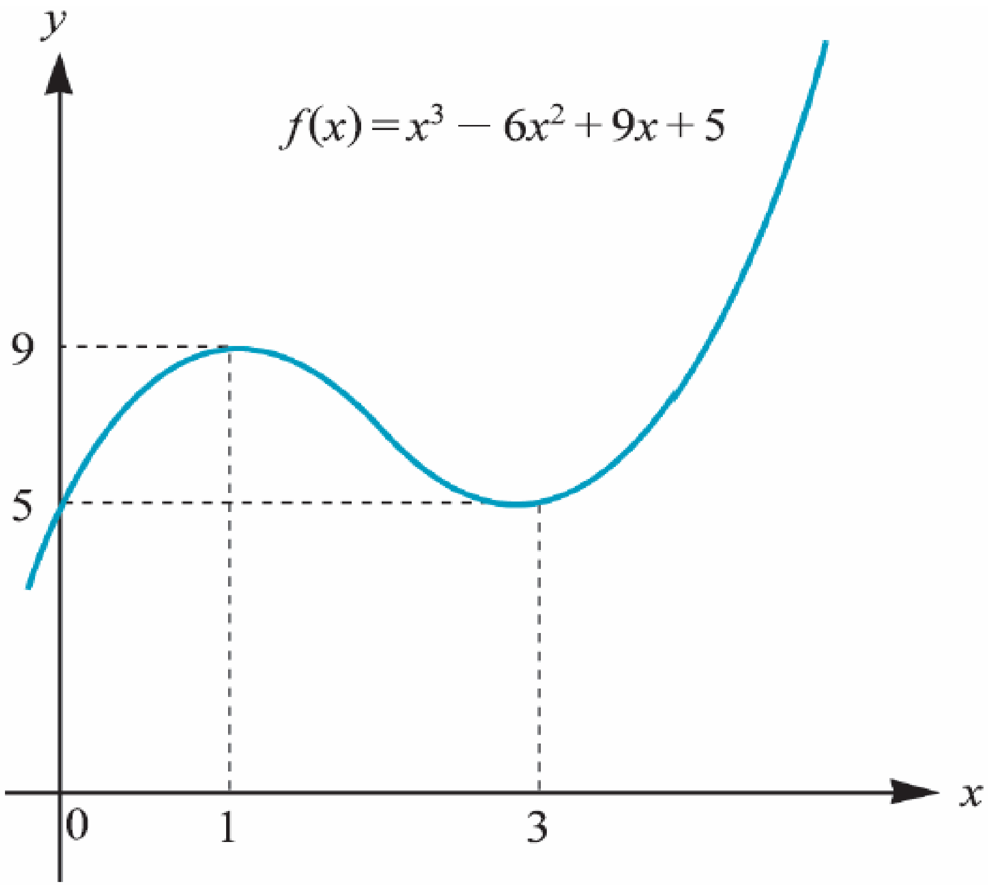

圖 4.15 $f(1)=9$ 為極大；$f(3)=5$ 為極小

例題 8

求 $f(x)=x^3-3x^2-24x+2,\ -3\le x\le 1$ 的絕對極值。

解　因 $f'(x)=3(x+2)(x-4)$，

令 $f'(x)=3(x+2)(x-4)=0$，得 $x=-2, 4$，

但 4 不在定義域內，則 $x=-2$ 為臨界點。

又 $x=-3$ 及 1 為定義域之端點，

分別計算 $-3, -2, 1$ 之函數值如表：

x	-3	-2	1
$f(x)$	20	30	-24

則知最大值為 $f(-2)=30$ 及最小值為 $f(1)=-24$。

例題 9

求 $f(x)=\cos x+\sin x,\ 0\le x\le 2\pi$ 的絕對極值。

解　因 $f'(x) = -\sin x + \cos x,\ 0 < x < 2\pi$，

令 $f'(x) = 0 \Rightarrow -\sin x + \cos x = 0$，

$\dfrac{\sin x}{\cos x} = 1$，

$\tan x = 1$，

則 $x = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}$。

又 $x = 0, 2\pi$ 為定義域之端點，

分別計算 $0, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, 2\pi$ 之函數值如表：

x	0	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{5\pi}{4}$	2π
$f(x)$	1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1

則最大值為 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ 及最小值為 $f\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$。

4.3函數的凹性、反曲點及圖形

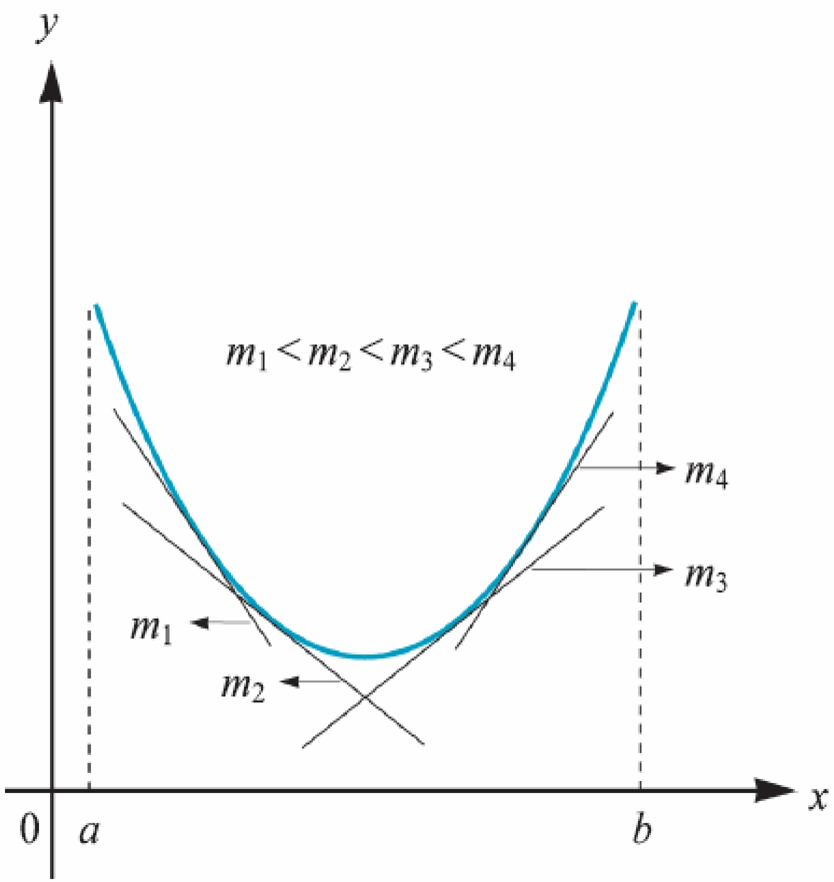

圖 4.16a 導數漸增，函數上凹

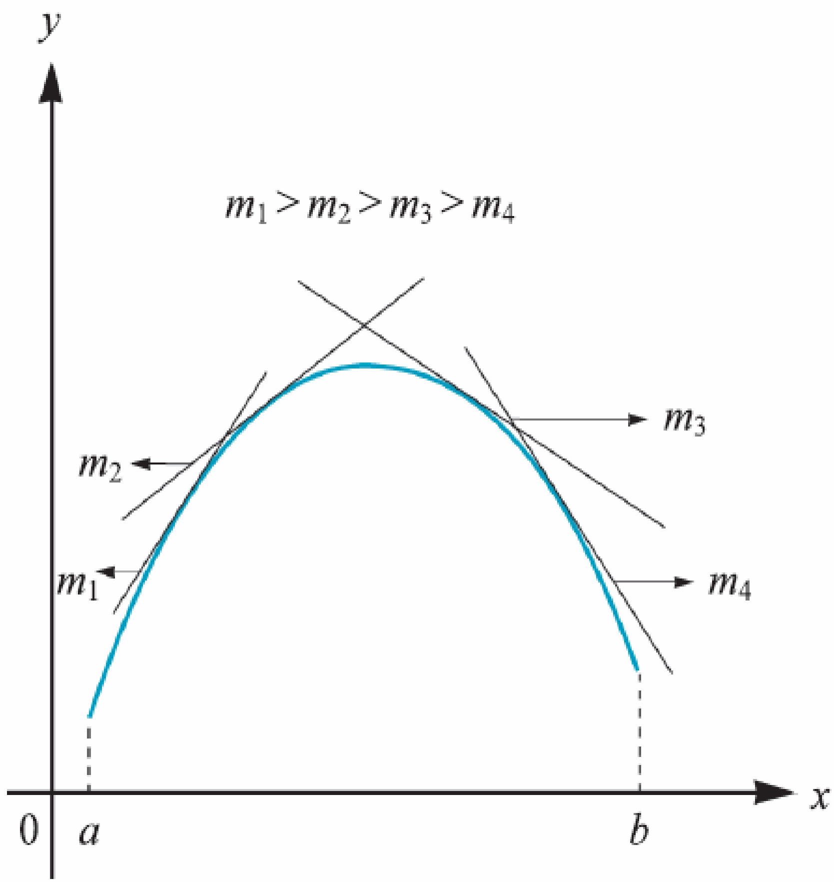

圖 4.16b 導數漸減，函數下凹

定義 4.5

設 f 在 (a, b) 導數存在。

(1) 若 f' 在 (a, b) 爲增函數，則稱 f 之圖形在 (a, b) 爲上凹 (Concave Upward)。

(2) 若 f' 在 (a, b) 爲減函數，則稱 f 之圖形在 (a, b) 爲下凹 (Concave Downward)。

定理 4.8

設函數 f 在 (a, b) 之二階導數存在。

(1) 若 $f''(x)>0,\ a<x<b$，則 f 之圖形在 (a, b) 爲上凹。

(2) 若 $f''(x)<0,\ a<x<b$，則 f 之圖形在 (a, b) 爲下凹。

證明：(1) 若 $f''(x)>0,\ a<x<b$，則由定理 4.5，我們知道 f' 在 (a, b) 爲增函數。因此依照定義 4.5 知道 f 在 (a, b) 之圖形爲上凹。

(2) 讀者自證之。

定義 4.6

設函數 f 在點 c 處連續，若存在一個開區間 (a, b)，$a<c<b$，使得 f 之圖形：

(1) 在 (a, c) 為上凹且在 (c, b) 為下凹，

或 (2) 在 (a, c) 為下凹且在 (c, b) 為上凹，

則點 $(c, f(c))$ 為 f 之圖形的一個**反曲點**。

定理 4.9

若 $(c, f(c))$ 為函數 f 的反曲點，則必 $f''(c)=0$ 或 f 在 c 處之二階導數不存在。

例題 1

試討論函數 $f(x)=x^3+3x^2$ 的凹性，並求反曲點。

解 因 $f'(x)=3x^2+6x$，

$f''(x)=6x+6$，

令 $f''(x)=6x+6=0$，

得 $x=-1$，

在 $x=-1$ 的兩側之凹性可由下表討論之：

x	$x<-1$	$-1<x$
$f''(x)$	$-$	$+$
f	下凹	上凹

CH 4

由上表知 f 之圖形在 $(-\infty, -1)$ 為下凹；

f 之圖形在 $(-1, \infty)$ 為上凹。

又 $f(-1)=2$，則點 $(-1, 2)$ 為反曲點。(圖 4.17)

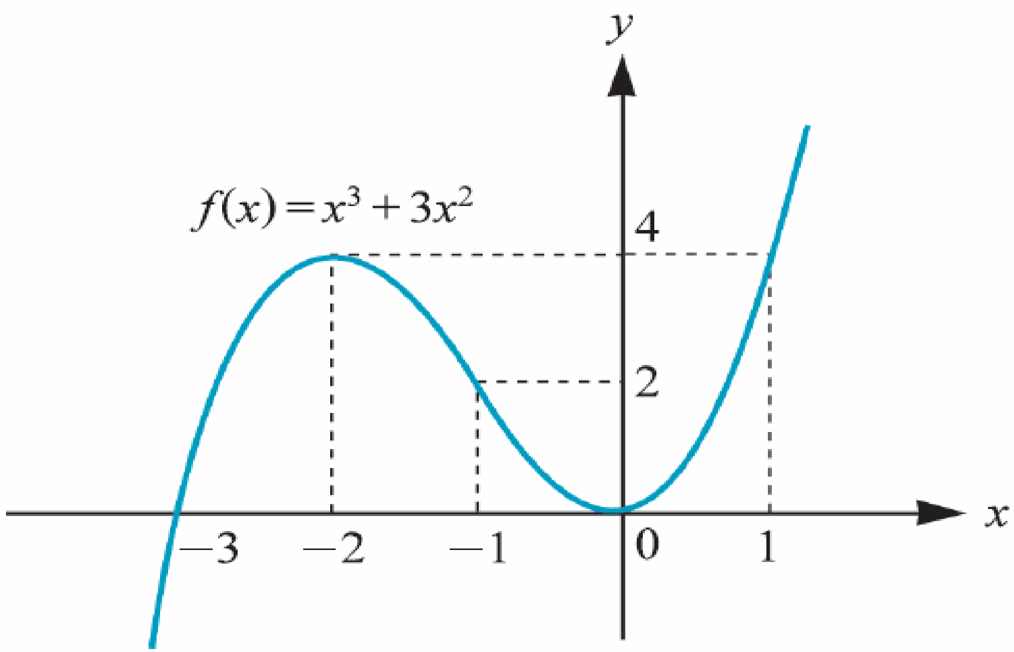

圖 4.17　$(-1, 2)$ 為反曲點

例題 2

試論函數 $f(x)=-x^{\frac{5}{3}}+5x^{\frac{2}{3}}$ 的凹性，並求反曲點。

解

因 $f'(x) = -\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}$，

$$f''(x) = -\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}$$

$$= -\frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}(x+1)$$

$$= \frac{-10(x+1)}{9x^{\frac{4}{3}}}，$$

在 $x=0$ 時，$f''(0)$ 無意義，

即 f 在 $x=0$ 處二階導數不存在。

又 $x=-1$ 時，$f''(-1)=0$。

凹性可由下表討論之：

x	$x<-1$	$-1<x<0$	$0<x$
$f''(x)$	$+$	$-$	$-$
f	上凹	下凹	下凹

由表知 f 之圖形在 $(-\infty, -1)$ 為上凹；

f 之圖形在 $(-1, 0)$ 及 $(0, \infty)$ 為下凹。

且知 f 在 $x=-1$ 之兩側具有不同凹性，

但 f 在 $x=0$ 之兩側凹性相同，

又 $f(-1)=6$，則點 $(-1, 6)$ 為反曲點。(圖 4.18)

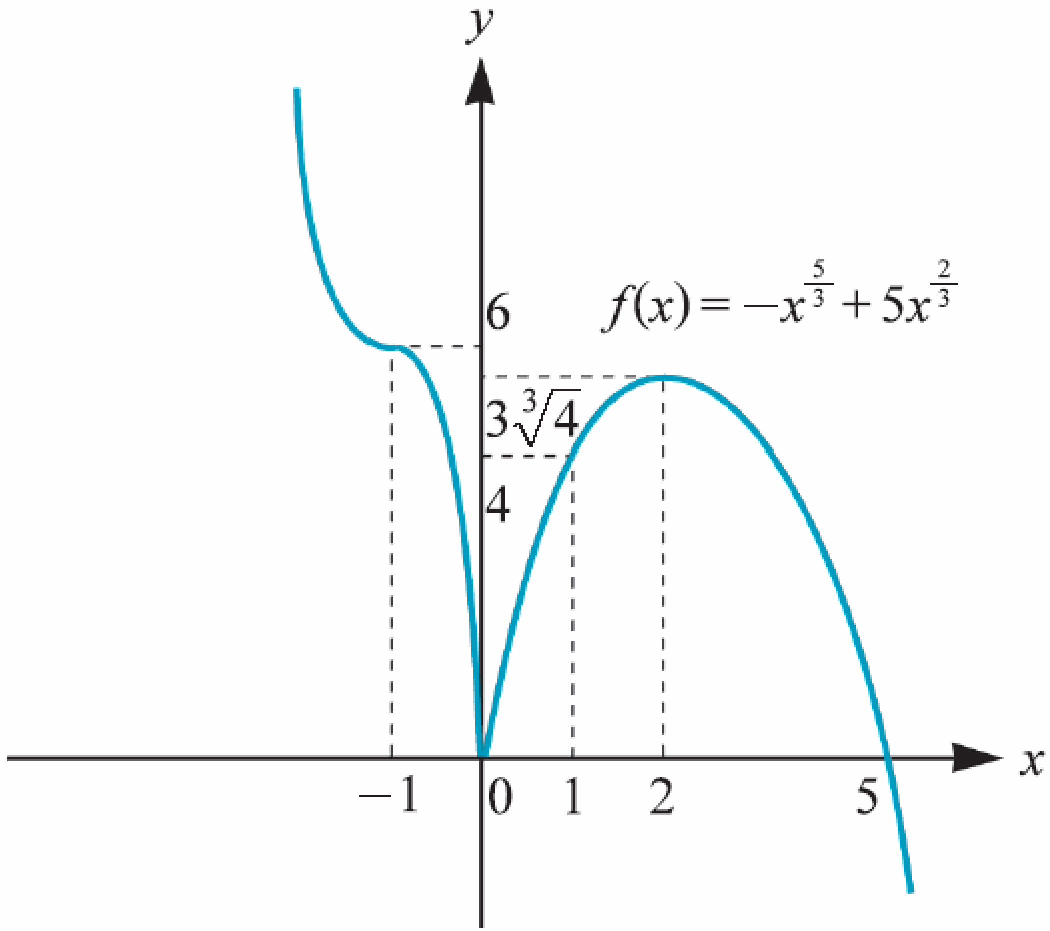

圖 4.18 (−1, 6) 為反曲點，而 (0, 0) 不是

例題 3

討論函數 $f(x)=-x^2+4x+1$ 之圖形。

解 我們先依次討論下列各性質。

(1) 定義域

對於任意實數 x，函數 f 均為有意義，則定義域為

$\{x \mid x \text{ 為實數}\}$。

(2) 值域

將 $f(x)=-x^2+4x+1$ 配方得

$f(x)=-(x-2)^2+5\leq 5$，

故知值域為

$\{y \mid y\leq 5\}$。

(3) 截距

令 $x=0$ 得 $f(0)=1$，則知圖形交 Y 軸於 $(0, 1)$。

(4) 增減性

因 $f'(x)=-2x+4$ 知函數的臨界點為 $x=2$，則其增減性可由下表討論之。

x	$x<2$	$2<x$
$f'(x)$	$+$	$-$
f	增函數	減函數

(5) 極值

由 (4) 之表可得知 $f(2)=5$ 為極大值。

(6) 凹性

對於定義域內之任意實數 x，$f''(x)=-2<0$，故知函數圖形為下凹，也可預知函數之圖形不具有反曲點。

綜合以上之討論，可得圖形如下：

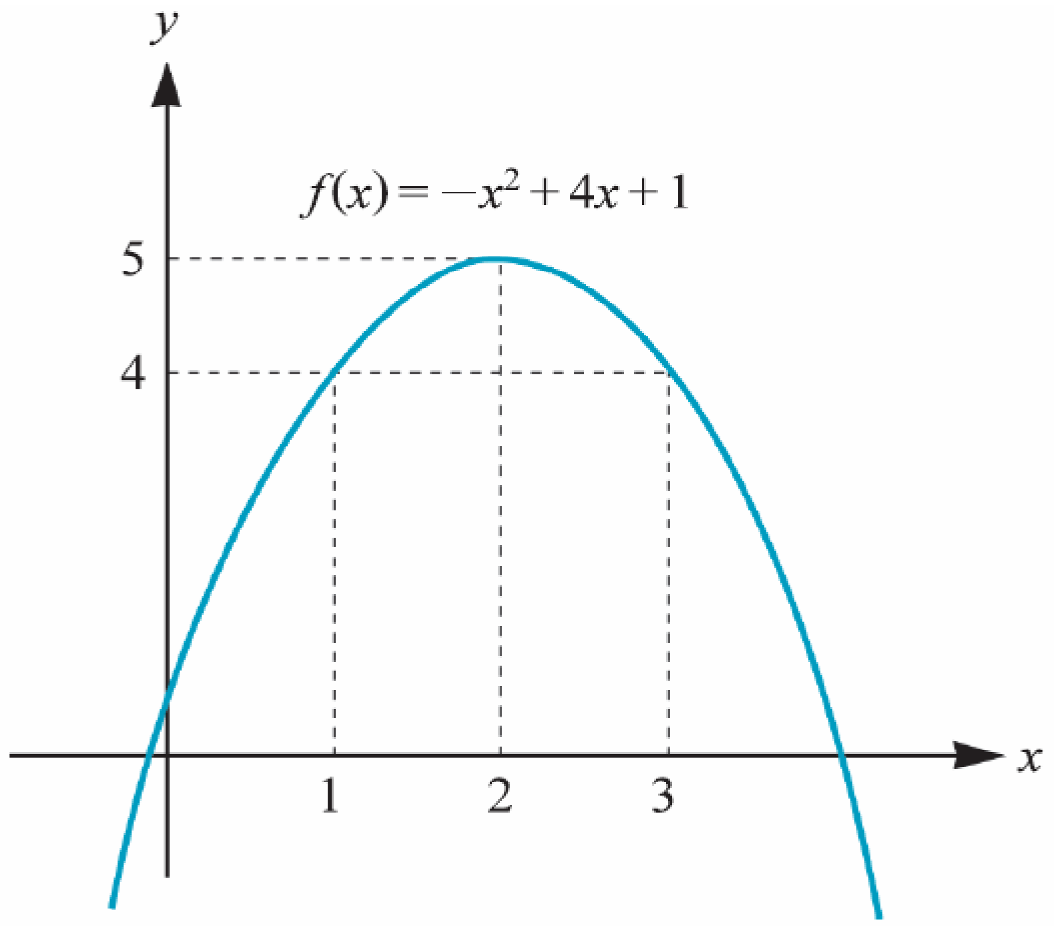

圖 4.19 頂在 (2, 5) 之抛物線

例題 4

討論函數 $f(x)=\dfrac{x^2}{4-x^2}$ 的圖形。

解 描圖之前，我們先依次討論下列各性質：

(1) 定義域

因分母 $4-x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$，則定義域為 $\{x \mid x \neq \pm 2\}$。

(2) 值域

設 $y=f(x)=\dfrac{x^2}{4-x^2}$，整理可得 $\dfrac{4y}{1+y}=x^2>0 \Rightarrow 4y(1+y)\geq 0$

且 $y\neq -1$，則 $y\geq 0$ 或 $y<-1$，即值域為 $\{y \mid y\geq 0$ 或 $y<-1\}$。

(3) 截距

令 $x=0$ 得 $f(0)=0$，則知函數圖形交 Y 軸於點 $(0, 0)$。

(4) 對稱性

因 $f(-x)=\dfrac{(-x)^2}{4-(-x)^2}=\dfrac{x^2}{4-x^2}=f(x)$，則知圖形對 Y 軸對稱。

(5) 增減性

由 $f'(x)=\dfrac{8x}{(4-x^2)^2}$ 可知臨界值為 $x=0$，

但 $x \neq \pm 2$，所以函數增減性可由下表討論之。

x	$x<-2$	$-2<x<0$	$0<x<2$	$2<x$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$
f	減函數	減函數	增函數	增函數

(6) 極值

由 (5) 之表可知 $f(0)=0$ 為極小值。

(7) 凹性

由 $f''(x)=\dfrac{32+24x^2}{(4-x^2)^3}\neq 0$ 且 $x\neq\pm 2$，凹性可由下表討論之。

x	$x<-2$	$-2<x<0$	$2<x$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
f	下凹	上凹	下凹

(8) 反曲點

由 (7) 之表得知凹性雖有改變，但因 $x\neq\pm 2$，故可知圖形不具反曲點。

(9) 漸近線

因 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{4-x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{4-x^2}-1=-1$，

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{4-x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{4-x^2}-1=-1$，

所以直線 $y=-1$ 為圖形的水平漸近線。

又 $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x^2}{4-x^2}=-\infty$，$\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x^2}{4-x^2}=\infty$，

$\lim\limits_{x\to+2^-}\dfrac{x^2}{4-x^2}=\infty$，$\lim\limits_{x\to+2^+}\dfrac{x^2}{4-x^2}=-\infty$，

所以直線 $x=-2$ 及 $x=2$ 都為垂直漸近線。經以上討論可得圖形如下：

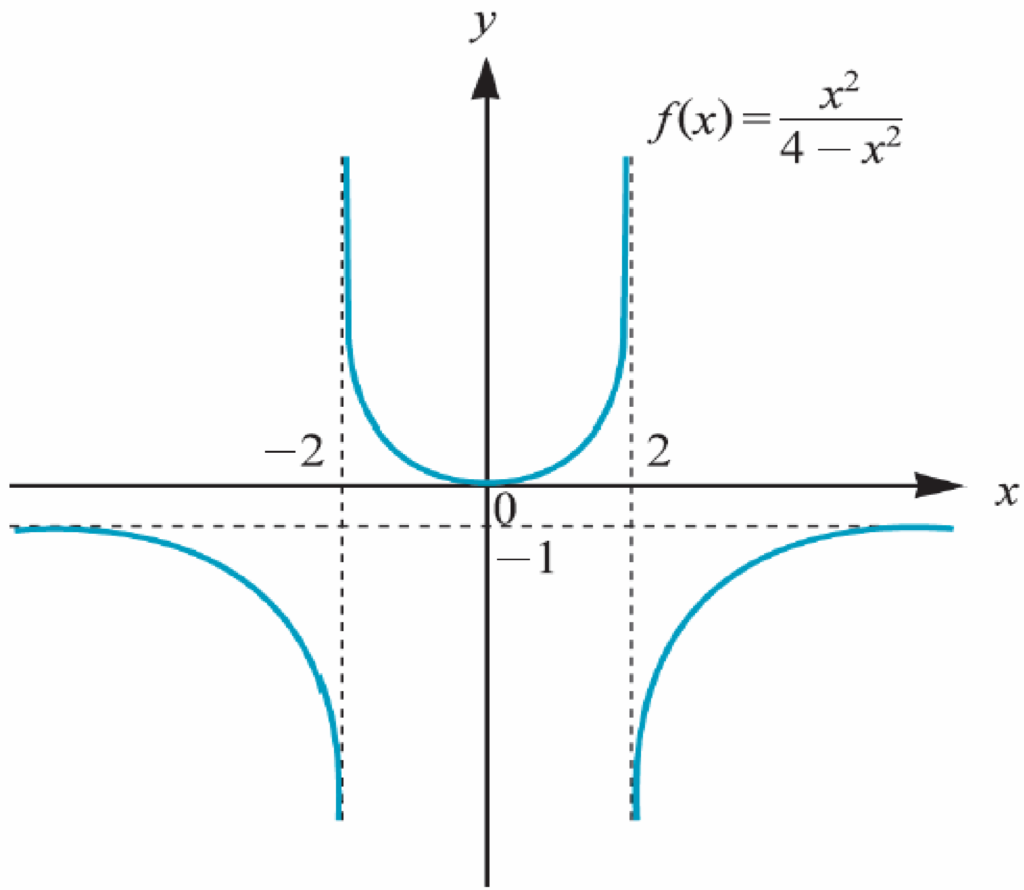

圖 4.20 極小值為 0，無極大值

例題 5

討論函數 $f(x) = x - e^{-x}$ 的圖形。

解 在描圖之前先討論下列各性質：

(1) 定義域

對於任意實數 x，函數均有意義，故定義域為

$\{x \mid x \text{ 為實數}\}$。

(2) 截距

令 $x=0$，得 $f(0)=-1$，則圖形交 Y 軸於點 $(0, -1)$。

(3) 增減性

因對於任意 x，$f'(x)=1+e^{-x}>0$，則 f 為增函數。

(4) 極值

由 (3) 知函數 f 不具極值。

(5) 凹性

因對於任意 x，$f''(x)=-e^{-x}<0$，則 f 為下凹。

(6) 反曲點

由 (5) 知函數 f 不具反曲點。

(7) 漸近線

因 $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)-x|=\lim\limits_{x\to\infty}|x-e^{-x}-x|=\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}=0$，所以直線 $y=x$ 為斜漸近線。

綜合以上討論可得圖形如下：

CH 4

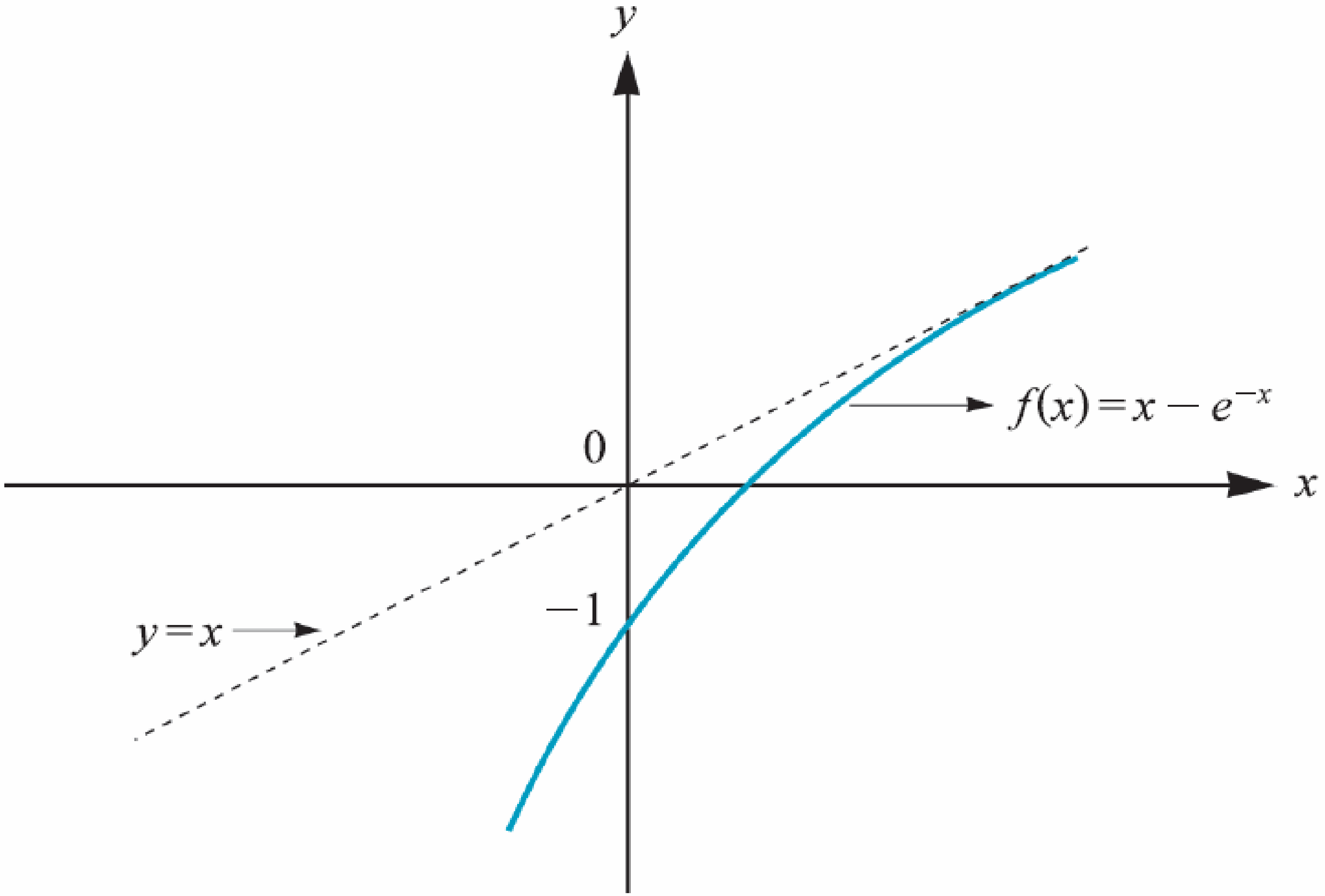

圖 4.21 無極值，$y=x$ 為斜漸近線

定理 4.10 (極值) 二階導數判別法

設 f 在 (a, b) 之二階導數存在且 $f'(c)=0$，$a<c<b$。

(1) 若 $f''(c)>0$，則 f 在 $x=c$ 處具極小值 $f(c)$。

(2) 若 $f''(c)<0$，則 f 在 $x=c$ 處具極大值 $f(c)$。

(3) 若 $f''(c)=0$，則無法判定 f 在 $x=c$ 處是否具有極值。(此時應以一階導數判別法檢驗之)

例題 6

設 $f(x)=(x-1)^2(x+2)$，應用二階導數判別法討論函數的極值。

解　因 $f'(x)=3(x-1)(x+1)$，

$f''(x)=6x$，

令 $f'(x)=0$ 得 $x=-1, 1$。

當 $x=-1$ 時，$f''(-1)=-6<0$，

則 $f(-1)=4$ 為極大值。

當 $x=1$ 時，$f''(1)=6>0$，

則 $f(1)=0$ 為極小值。

例題 7

試利用二階導數判別法求 $f(x)=xe^{\frac{x}{2}}$ 的極值。

解　因 $f'(x)=\left(\frac{1}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}(x+2)$，

$f''(x)=\left(\frac{1}{4}\right)e^{\frac{x}{2}}(x+4)$。

令 $f'(x)=0$，得 $x=-2$，

而 $x=-2$ 時，$f''(-2)=\frac{1}{2e}>0$。

故 $f(-2)=-2e^{-1}$ 為極小值。

註：由定理 4.10，我們知道用二階導數判別法求極值的方法只適合於一階導數為零的臨界點處，不適用於一階導數不存在之情形。針對一階導數不存在的臨界點處是否具有極值，應利用一階導數判別極值的方法為之。

4.4極值的應用

例題 1

設 S 爲一給定之正數，若 a, b 爲另兩正數且 $a+b=S$，試證明當 $a=b=\dfrac{S}{2}$ 時，ab 具有極大值。

解　由已知 $a+b=S$，得 $b=S-a$ 且 $ab=a(S-a),\ 0<a<S$。

令　$f(a)=a(S-a),\ 0<a<S$，

我們要求 $f(a)$ 的極大值，

因　$f'(a)=S-2a$，$f''(a)=-2$，

令　$f'(a)=0$，得 $a=\dfrac{S}{2}$ 為 $f(a)$ 之臨界點，

且　$f''\left(\dfrac{S}{2}\right)=-2<0$，

則知當 $a=\dfrac{S}{2}$，$b=S-a=\dfrac{S}{2}$ 時，

$f(a)=a(S-a)$ 具有極大值，

故得證當 $a=b=\dfrac{S}{2}$ 時，ab 具有極大值 $\dfrac{S^2}{4}$。

例題 2

試求拋物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 上一點之坐標，使之與已知點 $(0, 3)$ 距離最近。

解 設拋物線上一點 (x, y) 合所求。

因此 $y=\dfrac{x^2}{4}$，

且此點與 $(0, 3)$ 之距離 (圖 4.22) 為

$$d=\sqrt{x^2+(y-3)^3}$$

$$=\sqrt{x^2+\left(\frac{x^2}{4}-3\right)^2}\text{。}$$

當 $x^2+\left(\frac{x^2}{4}-3\right)^2$ 具有極小值時，d 必有極小值。

則令 $f(x)=x^2+\left(\frac{x^2}{4}-3\right)^2$，

我們現在要求的是 f 之極小值，由於

$$f'(x)=2x+x\left(\frac{x^2}{4}-3\right)$$

$$=\frac{x^3}{4}-x$$

$$=\frac{x(x^2-4)}{4}$$

$$=\frac{x(x+2)(x-2)}{4}\text{，}$$

$$f''(x)=\frac{3}{4}x^2-1\text{。}$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=0, -2, 2$ 為臨界點。

當 $x=0$ 時，$f''(0)=-1<0$；

當 $x=\pm2$ 時，$f''(-2)=f(+2)=2>0$，

利用二階導數判別法知 f 在 $x=\pm2$ 處具極小值。

又 $x=\pm2$ 時，代入 $y=\dfrac{x^2}{4}$，得 $y=1$，

故知點 $(-2, 1)$ 及點 $(2, 1)$ 均為所求之點。

CH 4

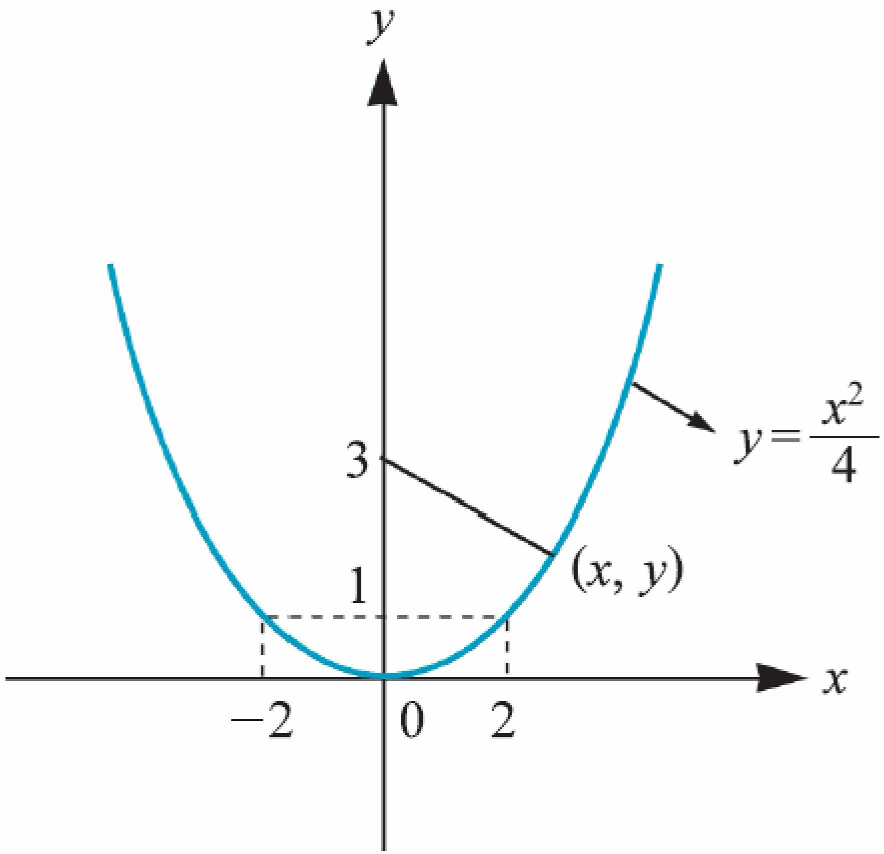

圖 4.22

例題 3

求一正圓柱體之規格使此正圓柱體具最大體積且能內接於半徑長爲 R 之球體內。

解

設此正圓柱體之底半徑為 r，高為 $2h$，

則正圓柱體之體積 $V=\pi r^2(2h)=2\pi r^2 h$。

由幾何性質知 (圖 4.23)

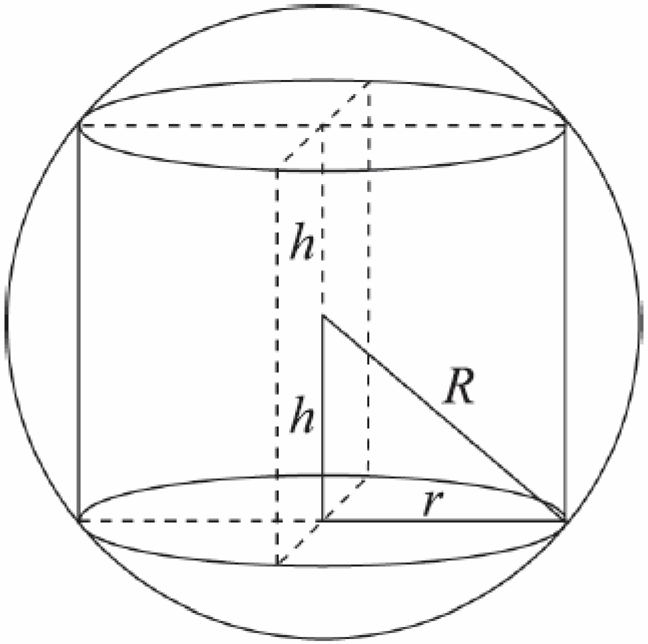

圖 4.23

$R^2 = r^2 + h^2$。

整理之，得 $r^2 = R^2 - h^2$，

因此 V 為 h 之函數，即

$$V = V(h) = 2\pi(R^2 - h^2)h$$

$$= 2\pi R^2 h - 2\pi h^3,\ 0 \le h \le R$$。

現在我們要求 V 的最大值，

微分 $V(h)$ 得

$$V'(h) = 2\pi R^2 - 6\pi h^2$$。

令 $V'(h)=0$，則 $2\pi R^2-6\pi h^2=0$，

$\Rightarrow 3h^2=R^2$。

$\therefore h=\pm\dfrac{R}{\sqrt{3}}$ (負值不合，因 $0\le h\le R$)，

所以 $h=\dfrac{R}{\sqrt{3}}$ 為臨界點。

而 $h=0, \dfrac{R}{\sqrt{3}}, R$ 時，V 的值分別為

h	0	$\dfrac{R}{\sqrt{3}}$	R
$V(h)$	0	$\dfrac{4\sqrt{3}\pi R^3}{9}$	0

由上表知當 $h=\dfrac{R}{\sqrt{3}}$，$r=\sqrt{R^2-h^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}R$ 時，V 有最大值

$V\left(\dfrac{R}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi R^3$。

故當圓柱體的底半徑為 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}R$，高為 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}R$ 時有最大體積

$\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi R^3$，且能內接於半徑長為 R 之球體內。

例題 5

力學的定理告訴我們：橫截面爲矩形之木樑的強度與木樑橫截面之寬和高之平方的乘積成正比例。現有一直徑爲 10 公分之圓柱形木材，問如何取材方能使此木樑具有最大強度？

解

設取材之方式為使橫截面之寬為 x，高為 y，

依照題意知木樑之強度 $I=kxy^2$，k 為比例常數且 $k>0$，由

圖 4.24 知

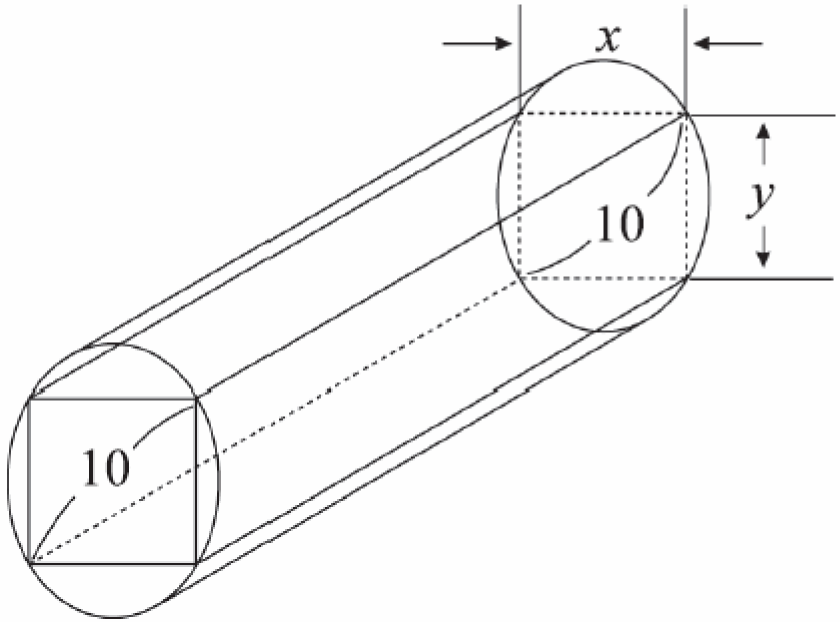

圖 4.24

由 $x^2+y^2=10^2$，

$\Rightarrow y^2=100-x^2$。

所以木樑之強度 I 為 x 的函數，即

$I=I(x)=kx(100-x^2),\ 0\le x\le 10$。

現求 $I(x)$ 的最大值，因為

$$
\begin{aligned}
I'(x)&=k(100-x^2)-2kx^2\\
&=k(100-3x^2)\text{。}
\end{aligned}
$$

令 $I'(x)=0$，得 $100-3x^2=0$，

$\Rightarrow 3x^2=100$。

$\therefore\ x=\pm\dfrac{10}{\sqrt{3}}$ (負值不合，因 $0\le x\le 10$)，

所以 $x=\dfrac{10}{\sqrt{3}}$ 為臨界點。

又當 $x=0, \dfrac{10}{\sqrt{3}}, 10$ 時，I 的函數值分別為

x	0	$\dfrac{10}{\sqrt{3}}$	10
$I(x)$	0	$\dfrac{2000}{3\sqrt{3}}k$	0

由上表知道 $x=\dfrac{10}{\sqrt{3}}$ 時，$I(x)$ 有最大值 $I\left(\dfrac{10}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{2000}{3\sqrt{3}}k$。故當木樑之橫截面的寬 $x=\dfrac{10}{\sqrt{3}}$，高 $y=\dfrac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 時，此木樑將具有最大的強度。

(三)極值在經濟學上的應用

例題 6

設某一商品售價爲 50 元時，其每月銷售量爲 8000 件，現廠商擬提高售價以便增加收入，但依市場調查顯示該產品每增加售價 1 元，銷售量會減少 100 件。問售價爲多少時會有最大的收入？總收入爲多少？

解　令售價為 p 元及對應之銷售量為 x 件

則收入 $R=px$。

依題意 $x=8000-100(p-50)$，

因此 R 為 p 的函數，即

$$
\begin{aligned}
R=R(p)&=p[8000-100(p-50)]\\
&=p(13000-100p)\\
&=-100p^2+13000p,\ p\geq 50\text{。}
\end{aligned}
$$

我們要求的是 R 的極大值。微分 $R(p)$ 得

$R'(p)=-200p+13000$，

$R''(p)=-200$。

令 $R'(p)=0$，得 $-200p+13000=0$，

$\Rightarrow p=65$，

則 $p=65$ 為 R 的臨界點。

又 $p=65$ 時，$R''(65)=-200<0$，

所以當 $p=65$ 時，R 有極大值 $R(65)=422500$。

而且 $p=65$ 得銷售量 $x=6500$，

故知售價為 65 元時，此商品將銷售 6500 件，此時最大之總收入為 422500 元。

例題 7

設生產某一產品 x 件所需總成本 $C(x)=0.003x^2-1.2x+1300$，求生產多少件產品時將具最低成本，且最小成本爲多少？

解 因 $C'(x)=0.006x-1.2$ 且 $C''(x)=0.006$。

若令 $C'(x)=0$，則 $0.006x-1.2=0$，

$\Rightarrow x=200$。

而且 $C''(200)=0.006>0$，

所以 $x=200$ 時，C 具有極小值 $C(200)=1180$，

即生產 200 件產品時成本最低，且最小成本為 1180 元。

例題 8

若總生產成本爲 $C(x)$，則 $Q(x)=\dfrac{C(x)}{x}$ 表平均成本，設 $C(x)=5x^2+2000$，求生產多少件產品時其平均成本爲最少？

解　由已知得

$$Q(x) = 5x + \frac{2000}{x}。$$

將 $Q(x)$ 微分得

$$Q'(x) = 5 - \frac{2000}{x^2}，$$

$Q''(x)=\dfrac{4000}{x^3}$。

令 $Q'(x)=0$，則 $5-\dfrac{2000}{x^2}=0$，

$\Rightarrow x^2=400$，

$\therefore\ x=\pm 20$。

檢視題意知 $x>0$，因此 $x=20$。

而且 $x=20$ 時，$Q''(20)=\dfrac{4000}{8000}=\dfrac{1}{2}>0$，

所以當 $x=20$ 時，Q 有極小值 $Q(20)=200$，

故生產20件產品時能得最小平均成本，最小平均成本為200。

例題 9

某件產品生產 x 件的總收入 $R(x)=125+2x+x^2$，

總成本 $C(x)=100-2x+\frac{3}{2}x^2$，

利　潤 $P(x)=R(x)-C(x)$。

問生產多少件可獲取最大利潤？

解

由已知

$$P(x)=R(x)-C(x)$$
$$=25+4x-\frac{x^2}{2}$$

要求的是 P 的極大值，

將 $P(x)$ 微分得 $P'(x)=4-x$，$P''(x)=-1$。

令 $P'(x)=0$，則 $4-x=0 \Rightarrow x=4$，

所以 $x=4$ 為 P 的臨界點，

而且 $P''(4)=-1<0$，

則 $x=4$ 時，P 有極大值。

故知產量為 4 件時會有最大的利潤。

CH 4

4.5不定型的極限與羅必達法則

定理 4.11

已知 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 為 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型極限，設函數 $f(x), g(x)$ 對於包含 a 之開區間內每一數 x，$x \neq a$，均為可導函數，且 $f'(x)$ 與 $g'(x)$ 都不為 0。

若 $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 極限存在且為 L 或極限為 $\pm\infty$，

則 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 極限存在且為 L 或極限為 $\pm\infty$。

(即 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ 或 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}, \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 均為 $\pm\infty$)

註：羅必達法則也適用於求左極限、右極限及無窮極限。

CH 4

不定型極限尚有：

(1) 若 $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$ 時，我們稱極限

$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))$ 爲 $\infty-\infty$ 不定型極限。

(2) 若 $\lim_{x\to a} f(x)=0$, $\lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ 時，我們稱極限

$\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ 爲 $0\cdot\infty$ 不定型極限。

(3) 若 $\lim_{x\to a} f(x)=0$, $\lim_{x\to a} g(x)=0$ 時，我們稱極限

$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ 爲 0^0 不定型極限。

(4) 若 $\lim_{x\to a} f(x)=1$, $\lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ 時，我們稱極限

$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ 爲 1^∞ 不定型極限。

(5) 若 $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, $\lim_{x\to a} g(x)=0$ 時，我們稱極限

例題 1

求 $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x}$。

解

因 $\lim_{x\to 0}(x-\sin x)=0$ 及 $\lim_{x\to 0}x=0$，所以此題為 $\frac{0}{0}$ 不定型。

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(x-\sin x)}{\frac{d}{dx}x} \quad \text{(羅必達法則)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1}$$

$$=0\text{。}$$

例題 2

求 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln\sqrt{x}}{x-1}$。

解

因 $\lim_{x\to 1}\ln\sqrt{x}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{2}=0$，$\lim_{x\to 1}(x-1)=0$，所以此題為 $\frac{0}{0}$ 不定型。

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\sqrt{x}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2}\ln x}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2x}}{1}\qquad(羅必達法則)$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\text{。}$$

例題 3

求 $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{e^x}$。

解

因 $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$ 及 $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$，所以此題為 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型。

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} \quad \text{(羅必達法則)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{xe^x}$$

$$= 0 \text{。}$$

例題 4

求 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - \cos x}{x}$。

解

因 $\lim_{x\to\infty}(x-\cos x)=\infty$，$\lim_{x\to\infty}x=\infty$，所以此題似應為 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型，

$$但\ \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(x-\cos x)}{\frac{d}{dx}x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sin x}{1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}(1+\sin x)\ 不存在，$$

我們不能因此說 $\lim_{x\to\infty}\frac{x-\cos x}{x}$ 也不存在。

因為 $\frac{x-\cos x}{x}=1-\frac{\cos x}{x}$ ，

由 $-1 \le \cos x \le 1$ 及 $x>0$，

$$\Rightarrow -\frac{1}{x} \le \frac{\cos x}{x} \le \frac{1}{x},\ x>0，$$

且 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$，

利用夾擠定理知

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x} = 0，$$

則
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-\cos x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{\cos x}{x}\right)$$
$$= 1 - \lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x}$$
$$= 1 - 0$$
$$= 1。$$

例題 5

求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - x^2}{e^x + e^{-x} - 2}$。

解

因 $\lim\limits_{x\to 0}(x^3-x^2)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}(e^x+e^{-x}-2)=0$，所以此題為 $\frac{0}{0}$ 不定型。

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^2}{e^x+e^{-x}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-2x}{e^x-e^{-x}} \quad \text{(羅必達法則，仍為 } \frac{0}{0} \text{ 不定型)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x-2}{e^x+e^{-x}} \quad \text{(羅必達法則)}$$

$$=\frac{-2}{2}$$

$$=-1 \text{。}$$

例題 6

求 $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2 - 3x}$ 。

解　因 $\lim_{x\to\infty} e^x=\infty$，$\lim_{x\to\infty}(x^2-3x)=\infty$，所以此題為 $\frac{\infty}{\infty}$ 之不定型。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2-3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x-3}$$ (羅必達法則，仍為 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型。)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}$$ (羅必達法則)

$$=\infty$$。

例題 7

求 $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\cot x}$。

解 因 $\lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$，$\lim_{x\to 0^+}\cot x = \infty$，所以此題為 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型。

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\cot x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x} \quad (\text{羅必達法則})$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} \quad (\csc^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}\text{，函數轉換})$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{-x} \quad (\frac{0}{0}\text{ 不定型})$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin x\cdot\cos x}{1} \quad (\text{羅必達法則})$$

$= 0$。

例題 8

求 $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$。

解 因 $\lim_{x\to 0^+} x = 0$，$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$，所以此題為 $0\cdot\infty$ 不定型。

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \quad (\frac{\infty}{\infty}\text{ 型})$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \quad (\text{羅必達法則})$$

$$= \lim_{x\to 0^+} (-x)$$

$$= 0 \text{。}$$

CH 4

CH 4

CH 4

CH 4

CH 4

CH 4

CH 4

CH 4

CH 4

CH 4