第3章

不定積分與積分技巧

章節概要

3.1 不定積分及基本積分公式

例題 1

當 $f(x)=x$，令 $F(x)=\frac{x^2}{2}$，則

$$F'(x)=x=f(x),\ \forall x\in R，$$

故由定義 3.1 知 $F(x)=\frac{x^2}{2}$ 爲 $f(x)=x$ 的反導函數。

例題 2

當 $f(x)=0$，令 $F(x)=c$，c 爲任意的常數，則

$$F'(x)=0=f(x),\ \forall x\in R,$$

故由定義 3.1 知任意的常數皆爲 0 的反導函數。

例題 3

當 $f(x)=x$，令 $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+c$，其中 c 爲任意常數，則

$$F'(x)=x=f(x),\ \forall x\in R,$$

故 $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+c$ 亦爲 $f(x)=x$ 的反導函數。

定理 3.1

若 $F'(x)=G'(x)=f(x),\ \forall x\in[a,\ b]$，則

$$G(x)=F(x)+c,\ \forall x\in[a,\ b]\text{。}$$

(即若 F 與 G 皆爲 f 在 $[a,\ b]$ 上的反導函數，則 F 與 G 相差一個常數。)

證明： 令 $H=G-F$，則 $H'(x)=G'(x)-F'(x)=0,\ \forall x\in(a,\ b)$，

由均值定理可知 $H(x)=c,\ \forall x\in(a,\ b)$。

又因 H 在 $[a,\ b]$ 上可微分，故 H 在 $[a,\ b]$ 上連續，

所以 $c=\lim\limits_{x\to a^+}H(x)=H(a)$，

而且 $c=\lim\limits_{x\to b^-}H(x)=H(b)$，

故 $H(x)=c,\ \forall x\in[a,\ b]$，

即 $G(x)=F(x)+c,\ \forall x\in[a,\ b]$，得證。

註：「均值定理」請參考第 4 章。

例題 4

由例題 1 知 $\int x\,dx=\dfrac{x^2}{2}+c$；由例題 2 知 $\int 0\,dx=c$。

基本積分公式

微分：$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$	$\Leftrightarrow$	積分：$\int f(x)\,dx=F(x)+c$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n,\ n\neq -1$	$\Leftrightarrow$	公式一：$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c,\ n\neq -1$
$\frac{d}{dx}\ln\|x\|=\frac{1}{x}=x^{-1}$	$\Leftrightarrow$	公式二：$\int x^{-1}\,dx=\int \frac{1}{x}\,dx=\ln\|x\|+c$
$\frac{d}{dx}e^x=e^x$	$\Leftrightarrow$	公式三：$\int e^x\,dx=e^x+c$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)=a^x$	$\Leftrightarrow$	公式四：$\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+c,\ a>0,\ a\neq 1$
$\frac{d}{dx}(-\cos x)=\sin x$	$\Leftrightarrow$	公式五：$\int \sin x\,dx=-\cos x+c$
$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$	$\Leftrightarrow$	公式六：$\int \cos x\,dx=\sin x+c$

基本積分公式(續)

$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$	$\Leftrightarrow$	公式七：$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$
$\frac{d}{dx}(-\cot x) = \csc^2 x$	$\Leftrightarrow$	公式八：$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + c$
$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$	$\Leftrightarrow$	公式九：$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$
$\frac{d}{dx}(-\csc x) = \csc x \cot x$	$\Leftrightarrow$	公式十：$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + c$

基本積分公式(續)

$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \lvert x\rvert<1$ $\frac{d}{dx}(-\cos^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \lvert x\rvert<1$	$\Leftrightarrow$	公式十一：$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}x+c$ $=-\cos^{-1}x+k,\ \lvert x\rvert<1$
$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{1}{1+x^2},\ x\in R$ $\frac{d}{dx}(-\cot^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2},\ x\in R$	$\Leftrightarrow$	公式十二：$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x+c$ $=-\cot^{-1}x+k,\ x\in R$
$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},\ \lvert x\rvert>1$ $\frac{d}{dx}(-\csc^{-1}x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},\ \lvert x\rvert>1$	$\Leftrightarrow$	公式十三：$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx=\sec^{-1}x+c$ $=-\csc^{-1}x+k,\ \lvert x\rvert>1$

例題 5

(a) $\int x^2\,dx=\dfrac{x^{2+1}}{2+1}+c=\dfrac{1}{3}x^3+c$；

(b) $\int x^{10}\,dx=\dfrac{x^{10+1}}{10+1}+c=\dfrac{1}{11}x^{11}+c$。

例題 6

(a) $\int \dfrac{1}{x^2}\,dx=\int x^{-2}\,dx=\dfrac{x^{-2+1}}{-2+1}+c=\dfrac{1}{-1}x^{-1}+c=-\dfrac{1}{x}+c$；

(b) $\int \dfrac{1}{x^{10}}\,dx=\int x^{-10}\,dx=\dfrac{x^{-10+1}}{-10+1}+c=\dfrac{1}{-9}x^{-9}+c=-\dfrac{1}{9x^9}+c$。

例題 7

(a) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\dfrac{1}{2}+1} + c = \dfrac{1}{\dfrac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + c = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$；

(b) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \dfrac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\dfrac{2}{3}+1} + c = \dfrac{1}{\dfrac{5}{3}}x^{\frac{5}{3}} + c = \dfrac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + c$。

例題 8

(a) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \dfrac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\dfrac{1}{2}+1} + c = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$；

(b) $\int \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int x^{-\frac{2}{3}}\,dx = \dfrac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\dfrac{2}{3}+1} + c = \dfrac{1}{\dfrac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + c = 3\sqrt[3]{x} + c$。

例題 9

(a) $\int 2^x\,dx = \dfrac{2^x}{\ln 2} + c$；

(b) $\int 10^x\,dx = \dfrac{10^x}{\ln 10} + c$。

例題 10

(a) $\int t^2\,dt = \dfrac{1}{3}t^3 + c$；

(b) $\int \sqrt{u}\,du = \int u^{\frac{1}{2}}\,du = \dfrac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \dfrac{2}{3}\sqrt{u^3} + c$。

定理 3.2

若 $F'(x)=f(x)$，$G'(x)=g(x)$，k 為常數，則

(1) $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx = kF(x)+c$。

(2) $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

$$= F(x)+G(x)+c$$ 。

例題 11

求 $\int (4x^2 - 3x + 7)\,dx$。

解 原式 $= 4\int x^2\,dx - 3\int x\,dx + 7\int 1\,dx$

$$= 4 \cdot \frac{x^3}{3} - 3 \cdot \frac{x^2}{2} + 7 \cdot x + c$$

$$= \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 7x + c$$ 。

例題 12

求 $\int\left(3x^4-5\sqrt[3]{x}+\dfrac{4}{\sqrt{x}}+6\right)dx$。

解

$$\begin{aligned}原式 &= \int (3x^4-5x^{\frac{1}{3}}+4x^{-\frac{1}{2}}+6)\,dx \\ &= 3\int x^4\,dx-5\int x^{\frac{1}{3}}\,dx+4\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx+6\int 1\,dx \\ &= 3\cdot\frac{x^5}{5}-5\cdot\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+4\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+6x+c \\ &= \frac{3}{5}x^5-\frac{15}{4}\sqrt[3]{x^4}+8\sqrt{x}+6x+c\text{。}\end{aligned}$$

例題 13

求 $\int (2x+3)^2\,dx$。

解 原式 $= \int ((2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 3 + 3^2)\,dx$

$$= \int (4x^2 + 12x + 9)\,dx$$

$$= 4\cdot\frac{x^3}{3} + 12\cdot\frac{x^2}{2} + 9\cdot x + c$$

$$= \frac{4}{3}x^3 + 6x^2 + 9x + c$$ 。

例題 14

求 $\int x^2\left(2x^3+\dfrac{3}{x^3}-2\right)dx$。

解

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int\left(2x^5+\frac{3}{x}-2x^2\right)dx \\
&= \frac{1}{3}x^6+3\ln|x|-\frac{2}{3}x^3+c\text{。}
\end{aligned}
$$

例題 15

求 $\int \frac{(x^2-2)^2}{5x^3}\,dx$

解

$$原式 = \frac{1}{5}\int \frac{(x^4-4x^2+4)}{x^3}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\int \left(x - \frac{4}{x} + 4x^{-3}\right) dx$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{x^2}{2} - 4\ln|x| + \frac{4}{-2}x^{-2}\right) + c$$

$$= \frac{1}{10}x^2 - \frac{4}{5}\ln|x| - \frac{2}{5x^2} + c \text{。}$$

例題 16

求 $\int e^{x}(2+3e^{-x})\,dx$。

解

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int (2e^{x}+3e^{0})\,dx \\
&= \int (2e^{x}+3)\,dx \\
&= 2e^{x}+3x+c \text{。}
\end{aligned}$$

例題 17

求 $\int (2x^{3}+5e^{x}+3^{x})\,dx$。

解

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= 2\int x^{3}\,dx+5\int e^{x}\,dx+\int 3^{x}\,dx \\
&= \frac{1}{2}x^{4}+5e^{x}+\frac{3^{x}}{\ln 3}+c \text{。}
\end{aligned}$$

例題 18

求 $\int (2\cos\theta + 5\sin\theta)\,d\theta$。

解 原式 $= 2\int \cos\theta\,d\theta + 5\int \sin\theta\,d\theta$

$= 2\sin\theta - 5\cos\theta + c$。

3.2 變數變換法(代換法)

3.2.1基本代換法

例題 1

求 $\int e^{ax}\,dx,\ a \neq 0,\ a \in R$。

解 方法一：

我們熟悉的基本積分公式有 $\int e^{x}\,dx = e^{x} + c$，那是因為 $\frac{d}{dx}e^{x} = e^{x}$，但是 $\frac{d}{dx}e^{ax}$ 不等於 e^{ax}，而是 ae^{ax}，所以 $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)$ 才會等於 e^{ax}，因此 $\frac{1}{a}e^{ax}$ 是 e^{ax} 的反導函數，

$$\therefore \int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$$ 。

例題 1

求 $\int e^{ax}\,dx,\ a\neq 0,\ a\in R$。

解 方法二：

若我們令 $u=ax$，則 $du=adx$，即 $dx=\dfrac{1}{a}du$，

故 $\displaystyle\int e^{ax}\,dx=\int e^{u}\cdot\frac{1}{a}\,du$

$$=\frac{1}{a}\int e^{u}\,du\ (\because\ \int e^{x}\,dx=e^{x}+c,\ \therefore\ \int e^{u}\,du=e^{u}+c)$$

$$=\frac{1}{a}(e^{u}+c_0),\ c_0\in R$$

$$=\frac{1}{a}e^{u}+c,\ c=\frac{c_0}{a}\in R$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}+c\ 。$$

定理 3.3

若 F 爲 f 的一個反導函數，即 $\int f(x)\,dx = F(x) + c$，則 $\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + c$。

證明：

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$= f(g(x))g'(x) \quad \text{得證。}$$

例題 2

求 $\int (2x+3)^2\,dx$。

解 令 $u=2x+3$，則 $du=2\,dx$，即 $dx=\frac{1}{2}du$。

$$\text{原式}=\int u^2\cdot\frac{1}{2}du=\frac{1}{2}\int u^2\,du=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^3}{3}+c_0$$

$$=\frac{1}{6}(2x+3)^3+c_0$$

$$=\frac{1}{6}(8x^3+36x^2+54x+27)+c_0$$

$$=\frac{4}{3}x^3+6x^2+9x+c\text{。}$$

其中 $c=\frac{9}{2}+c_0\in R$。

例題 3

求 $\int (2x+3)^{100}\,dx$。

解

令 $u=2x+3$，則 $du=2dx$，即 $dx=\frac{1}{2}du$。

$$原式=\int u^{100}\cdot\frac{1}{2}du$$

$$=\frac{1}{2}\int u^{100}du=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{101}}{101}+c=\frac{u^{101}}{202}+c$$

$$=\frac{(2x+3)^{101}}{202}+c,\ c\in R。$$

例題 4

求 $\int x\sqrt{1+x^2}dx$。

解 令 $u=1+x^2$，則 $\dfrac{du}{dx}=2x$，即 $xdx=\dfrac{1}{2}du$。

故 $$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx=\int\sqrt{1+x^2}\cdot x\,dx$$
$$=\int\sqrt{u}\cdot\frac{1}{2}du=\frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}+c$$

例題 4

求 $\int x\sqrt{1+x^2}dx$。

解 我們也可以用下列的寫法，有時候會比較方便，

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{1+x^2}\,2x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\,d(1+x^2)$$

$$(\text{因為 } d(1+x^2)=2x\,dx)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c$$

$$=\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}+c$$ 。

例題 5

求 $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}dx$。

解

令 $u=x^2+4x+5$，則 $\frac{du}{dx}=2x+4=2(x+2)$，

即 $(x+2)\,dx=\frac{1}{2}du$。

故原式 $=\int \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{2}du=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}du=\frac{1}{2}\ln|u|+c$

$=\frac{1}{2}\ln|x^2+4x+5|+c=\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)+c$。

例題 6

求 $\int \frac{k}{ax+b}dx$，其中 $a \neq 0$，a, b, k 皆爲常數。

解 令 $u = ax+b \Rightarrow du = adx$，即 $dx = \frac{1}{a}du$。

$$\text{故原式} = \int \frac{k}{u} \cdot \frac{du}{a} = \frac{k}{a}\int \frac{1}{u}du = \frac{k}{a}\ln|u| + c$$

$$= \frac{k}{a}\ln|ax+b| + c\text{。}$$

例題 7

求 $\int \frac{1}{(ax+b)^n}dx$，其中 $a \neq 0$，a, b 皆爲常數。

解

令 $u = ax + b \Rightarrow dx = \frac{1}{a}du$。

$$原式 = \int \frac{1}{u^n} \cdot \frac{1}{a}du = \frac{1}{a}\int u^{-n}du$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{a}\ln|u| + c, & 當\ n = 1 \\ \frac{1}{a}\left(\frac{u^{-n+1}}{-n+1}\right) + c, & 當\ n \neq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c, & 當\ n = 1 \\ \frac{-1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}} + c, & 當\ n \neq 1 \end{cases}。$$

例題 8

求 $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx$。

解 **解法一：**

令 $u=x^2+4$，則 $\frac{du}{dx}=2x$，即 $x\,dx=\frac{1}{2}du$。

原式 $=\int \frac{1}{\sqrt{u}}\cdot\frac{1}{2}du=\frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}}+c=\sqrt{u}+c=\sqrt{x^2+4}+c$$。

例題 8

求 $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx$。

解 解法二：

$$原式 = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}2x\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2+4)^{-1/2}\,d(x^2+4)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+4)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{x^2+4}+c \text{。}$$

例題 9

證明 (a) $\int \cos(mx)\,dx = \frac{1}{m}\sin(mx) + c$；

(b) $\int \sin(mx)\,dx = \frac{-1}{m}\cos(mx) + c$。

解

(a) 令 $u = mx$，則 $\frac{du}{dx} = m$，即 $dx = \frac{1}{m}du$。

故 $\int \cos(mx)\,dx$

$$= \int \cos u \cdot \left(\frac{1}{m}du\right) = \frac{1}{m}\int \cos u\,du = \frac{1}{m}\sin u + c$$

$$= \frac{1}{m}\sin(mx) + c$$ 。

(b) 省略 (與 (a) 類似)。

例題 10

求 $\int (2\cos 3x + 4\sin 5x)\,dx$。

解 利用例題 9 的結果，得

$$\int (2\cos 3x + 4\sin 5x)\,dx$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3}\sin 3x + 4 \cdot \frac{-1}{5}\cos 5x + c$$

$$= \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{4}{5}\cos 5x + c \text{。}$$

例題 11

求 $\int \tan^2 x \sec^2 x \, dx$。

解

令 $u = \tan x$，則 $\dfrac{du}{dx} = \sec^2 x$，

即 $\sec^2 x \, dx = du$，$\tan^2 x = (\tan x)^2 = u^2$。

原式 $= \int u^2 \, du = \dfrac{u^3}{3} + c = \dfrac{\tan^3 x}{3} + c$。

例題 12

求 $\int \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$。

解

令 $u = \sqrt{x}$，則 $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，即 $\dfrac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\, du$。

原式 $= 2\int e^u \, du = 2e^u + c = 2e^{\sqrt{x}} + c$。

例題 13

求 $\int \tan x \, dx$。

解

因為 $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$，令 $u = \cos x$，

則 $\dfrac{du}{dx} = -\sin x$，即 $\sin x \, dx = -du$。

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-1}{u} du$$

$$= -\int \frac{1}{u} du = -\ln|u| + c$$

$$= -\ln|\cos x| + c = \ln|\cos x|^{-1} + c$$

$$= \ln|\sec x| + c \text{。}$$

例題 14

求 $\int \sec x \, dx$。

解 令 $u = \sec x + \tan x$，則 $\dfrac{du}{dx} = \sec x \tan x + \sec^2 x$，

即 $\sec x (\sec x + \tan x)\, dx = du$。

$$
\begin{aligned}
\int \sec x \, dx &= \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)} dx \\
&= \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c \\
&= \ln|\sec x + \tan x| + c
\end{aligned}
$$
。

例題 15

(a) $\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + c$；

(b) $\int e^{-2x}\,dx = \frac{1}{-2}e^{-2x} + c = -\frac{1}{2}e^{-2x} + c$；

(c) $\int e^{\frac{x}{2}}\,dx = \int e^{\frac{1}{2}x}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}x} + c = 2e^{\frac{x}{2}} + c$。

例題 16

$$\int e^{4x}(3e^{2x} - 2e^{-3x})\,dx = ?$$

解

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int (3e^{(4x+2x)} - 2e^{(4x-3x)})\,dx \\
&= \int (3e^{6x} - 2e^{x})\,dx \\
&= \frac{1}{2}e^{6x} - 2e^{x} + c \text{。}
\end{aligned}$$

例題 17

證明 (a) $\int \sinh x\, dx = \cosh x + c$；

(b) $\int \cosh x\, dx = \sinh x + c$。

解

(a) $\int \sinh x\, dx = \int \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} dx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + c = \cosh x + c$。

(b) $\int \cosh x\, dx = \int \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} + c = \sinh x + c$。

例題 18

$$\int (\sinh x \cdot \cosh x)\, dx = ?$$

解

$$\text{原式} = \int \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \int [(e^x)^2 - (e^{-x})^2]\, dx$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \int (e^{2x} - e^{-2x})\, dx$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{-2}e^{-2x}\right) + c$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}\right) + c$$

$$= \frac{1}{4}\cosh(2x) + c \text{。}$$

例題 19

$$\int \operatorname{sech} x \, dx = ?$$

解

$$\int \operatorname{sech} x \, dx = \int \frac{1}{\cosh x} dx$$

$$= \int \frac{2}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$= \int \frac{2}{e^{-x}(e^{2x}+1)} dx$$

$$= \int \frac{2e^x}{e^{2x}+1} dx \text{。}$$

令 $u = e^x$，得 $du = e^x \, dx$。

$$\text{原式} = \int \frac{2}{u^2+1} du$$

$$= 2\tan^{-1} u + c$$

$$= 2\tan^{-1}(e^x) + c \text{。}$$

3.2.2 代數代換法

例題 1

求 $\int x\sqrt{3x+1}\,dx$。

解 令 $u=3x+1$，則 $x=\frac{1}{3}(u-1)$，即 $dx=\frac{1}{3}du$。

$$\text{原式}=\int \frac{1}{3}(u-1)\cdot\sqrt{u}\cdot\frac{1}{3}du$$

$$=\frac{1}{9}\int (u^{3/2}-u^{1/2})\,du$$

$$=\frac{1}{9}\left(\frac{u^{5/2}}{\frac{5}{2}}-\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right)+c$$

$$=\frac{2}{45}(3x+1)^{5/2}-\frac{2}{27}(3x+1)^{3/2}+c \text{。}$$

例題 2

求 $\int \frac{x}{\sqrt{x}+1}dx$。

解 令 $u=\sqrt{x}+1$，則 $x=(u-1)^2$，$dx=2(u-1)\,du$。

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{(u-1)^2}{u}\cdot 2(u-1)\,du \\
&= 2\int \frac{(u-1)^3}{u}du \\
&= 2\int \left(u^2-3u+3-\frac{1}{u}\right)du \\
&= 2\left(\frac{u^3}{3}-\frac{3}{2}u^2+3u-\ln|u|\right)+c \\
&= \frac{2}{3}(\sqrt{x}+1)^3-3(\sqrt{x}+1)^2+6(\sqrt{x}+1)-2\ln(\sqrt{x}+1)+c
\end{aligned}
$$
。

例題 3

求 $\int \frac{4x^2-3}{\sqrt{(2x+3)^3}}dx$。

解 令 $u=2x+3$，則 $x=\frac{1}{2}(u-3)$，$dx=\frac{1}{2}du$。

$$原式=\int \frac{4\left[\frac{1}{2}(u-3)\right]^2-3}{\sqrt{u^3}}\cdot\frac{1}{2}du$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{u^2-6u+9-3}{u^{3/2}}du$$

$$=\frac{1}{2}\int (u^{1/2}-6u^{-1/2}+6u^{-3/2})\,du$$

(續)

解

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} - 6 \cdot \frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} + 6 \cdot \frac{u^{-1/2}}{-\frac{1}{2}}\right) + c$$

$$= \frac{1}{3}(2x+3)^{3/2} - 6(2x+3)^{1/2} - 6(2x+3)^{-1/2} + c$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(2x+3)^3} - 6\sqrt{(2x+3)} - \frac{6}{\sqrt{2x+3}} + c \text{ 。}$$

例題 4

求$\int \dfrac{6x+1}{\sqrt[5]{3x+1}}dx$。

解 令 $u=3x+1$，則 $x=\dfrac{1}{3}(u-1)$，$dx=\dfrac{1}{3}du$。

$$原式=\int \frac{6\cdot\left[\frac{1}{3}(u-1)\right]+1}{\sqrt[5]{u}}\cdot\frac{1}{3}du$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{2u-1}{u^{1/5}}du$$

$$=\frac{1}{3}\int(2\cdot u^{4/5}-u^{-1/5})\,du$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{u^{9/5}}{\frac{9}{5}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{u^{4/5}}{\frac{4}{5}}+c$$

$$=\frac{10}{27}(3x+1)^{9/5}-\frac{5}{12}(3x+1)^{4/5}+c\text{。}$$

例題 5

求 $\int \frac{x^3+x}{\sqrt{4-x^2}}dx$。

解 令 $u=4-x^2$，則 $x^2=4-u$，$du=-2x\,dx$，即 $x\,dx=-\frac{1}{2}du$。

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{(x^2+1)}{\sqrt{4-x^2}} \cdot x\,dx \\
&= \int \frac{5-u}{\sqrt{u}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du \\
&= -\frac{1}{2}\int (5u^{-1/2}-u^{1/2})\,du \\
&= -\frac{1}{2}\left[5\cdot\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}}-\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]+c \\
&= -5(4-x^2)^{1/2}+\frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2}+c\text{。}
\end{aligned}
$$

例題 6

求 $\int \frac{x+3}{x^2+4x+5}dx$。

解 分母的二次多項式配方得：$x^2+4x+5=(x+2)^2+1$，

令 $u=x+2$，則 $x=u-2$，$dx=du$。

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{(x+2)+1}{(x+2)^2+1}dx \\
&= \int \frac{u+1}{u^2+1}du \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+1}du + \int \frac{1}{u^2+1}du \\
&= \frac{1}{2}\ln(u^2+1)+\tan^{-1}u+c \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)+\tan^{-1}(x+2)+c
\end{aligned}$$

。

3.3 有理函數之積分

例題 1

求 $\int \frac{x+1}{x^2-4}dx$。

解 $x^2-4=(x+2)(x-2)$，

令 $\frac{x+1}{x^2-4}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}$，

通分得 $\frac{x+1}{x^2-4}=\frac{A(x-2)+B(x+2)}{x^2-4}$，

$x+1=(A+B)x+2(-A+B)$

(續)

解

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ 2(-A+B)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{4} \\ B=\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\text{原式}=\int\left(\frac{\frac{1}{4}}{x+2}+\frac{\frac{3}{4}}{x-2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\ln|x+2|+\frac{3}{4}\ln|x-2|+c\text{。}$$

例題 2

求 $\int \frac{x^3-2x}{x^2+3x+2}dx$。

解 因為被積分函數為假分式，可利用長除法將原式化作

$$\int\left[(x-3)+\frac{5x+6}{x^2+3x+2}\right]dx,$$

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2),$$

令 $\frac{5x+6}{x^2+3x+2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$，

通分比較係數得：$A(x+2)+B(x+1)=5x+6$，

即 $\begin{cases} A+B=5 \\ 2A+B=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=4 \end{cases}$

故原式 $=\int\left[(x-3)+\frac{1}{x+1}+\frac{4}{x+2}\right]dx$

$$=\frac{x^2}{2}-3x+\ln|x+1|+4\ln|x+2|+c。$$

例題 3

求 $\int \frac{x^2+2x-6}{(x-1)^3}dx$。

解 首先將被積分函數化為部分分式如下：

令 $\frac{x^2+2x-6}{(x-1)^3}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)}$，

將右式通分後再與左式比較係數得

$$
\begin{aligned}
x^2+2x-6 &= A+B(x-1)+C(x-1)^2 \\
&= Cx^2+(B-2C)x+(A-B+C)
\end{aligned}
$$

解

$$\Rightarrow \begin{cases} C=1 \\ B-2C=2 \\ A-B+C=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-3 \\ B=4 \\ C=1 \end{cases}$$

$$原式 = \int \left[\frac{-3}{(x-1)^3}+\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)}\right]dx$$

$$=\frac{3}{2(x-1)^2}-\frac{4}{x-1}+\ln|x-1|+c 。$$

註：在本題中，亦可令 $u=x-1 \Rightarrow x=u+1$，$dx=du$，

$$原式 = \int \frac{(u+1)^2+2(u+1)-6}{u^3}du=\int \frac{u^2+4u-3}{u^3}du$$

$=\int \left(\frac{1}{u}+4u^{-2}-3u^{-3}\right)du$ 解之，最後 u 再以 $x-1$ 換回。

例題 4

求 $\int \frac{5x^2 - x + 1}{x^3 - 4x^2} dx$。

解 $\int \frac{5x^2 - x + 1}{x^3 - 4x^2} dx = \int \frac{5x^2 - x + 1}{x^2(x-4)} dx = \int \left(\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-4}\right) dx$

$$= -\frac{A}{x} + B\ln|x| + C\ln|x-4| + k \text{。}$$

其中 A, B, C 可由 $A(x-4) + Bx(x-4) + Cx^2 = 5x^2 - x + 1$，

比較係數得到：$A = -\frac{1}{4}$，$B = \frac{3}{16}$，$C = \frac{77}{16}$。

例題 5

求 $\int \frac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}dx$。

解

$$\int \frac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}dx = \int \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x-1)^2}dx$$

$$= \int \frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{A_1}{(x+1)}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{B_1}{(x-1)}dx$$

$$= -\frac{A_2}{x+1}+A_1\ln|x+1|-\frac{B_2}{x-1}+B_1\ln|x-1|+k \text{。}$$

其中 A_1, A_2, B_1, B_2 可由

$A_2(x-1)^2+A_1(x+1)(x-1)^2+B_2(x+1)^2+B_1(x+1)^2(x-1)=$

x^2+x+1，比較係數，

解得：$A_1=0$，$A_2=\frac{1}{4}$，$B_1=0$，$B_2=\frac{3}{4}$。

例題 6

求 $\int \frac{x^3+4x^2+5x+8}{(x^2+4x+5)(x^2+1)}dx$ 。

解

令 $\frac{x^3+4x^2+5x+8}{(x^2+4x+5)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+4x+5} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$

$$\Rightarrow x^3+4x^2+5x+8$$

$$=(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+4x+5)$$

$$=(A+C)x^3+(B+4C+D)x^2+(A+5C+4D)x+(B+5D)$$

解

$$\Rightarrow \begin{cases} A+C=1 \\ B+4C+D=4 \\ A+5C+4D=5 \\ B+5D=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=3 \\ C=0 \\ D=1 \end{cases}$$

原式 $= \int \frac{x+3}{x^2+4x+5}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx$

$= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) + \tan^{-1}(x+2) + \tan^{-1}x + k$。

其中 $\int \frac{x+3}{x^2+4x+5}dx$ 之解法，可參看 3.2.2 節例題 6。

例題 7

求 $\int \frac{2x^3+5x^2+8x+8}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}dx$。

解

令 $\frac{2x^3+5x^2+8x+8}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$

$$\Rightarrow 2x^3+5x^2+8x+8$$

$$=(Ax+B)(x^2+2x+2)+(Cx+D)(x^2+1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+C=2 \\ 2A+B+D=5 \\ 2A+2B+C=8 \\ 2B+D=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=3 \\ C=2 \\ D=2 \end{cases}$$

(續)

解

原式 $=\int \frac{3}{x^2+1}dx+\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx$，

令 $u=x^2+2x+2$，則 $du=(2x+2)\,dx$，

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx=\int \frac{1}{u}du=\ln|u|+c$$

$$=\ln(x^2+2x+2)+c$$ 。

所以原式 $=3\tan^{-1}x+\ln(x^2+2x+2)+k$ 。

例題 8

求 $\int \frac{x^3+7x^2+18x+17}{(x^2+4x+5)^2}dx$。

解

令 $\frac{x^3+7x^2+18x+17}{(x^2+4x+5)^2}=\frac{Ax+B}{(x^2+4x+5)}+\frac{Cx+D}{(x^2+4x+5)^2}$，

即 $x^3+7x^2+18x+17=(Ax+B)(x^2+4x+5)+(Cx+D)$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ 4A+B=7 \\ 5A+4B+C=18 \\ 5B+D=17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=3 \\ C=1 \\ D=2 \end{cases}$$

原式 $=\int \frac{x+3}{x^2+4x+5}dx+\int \frac{x+2}{(x^2+4x+5)^2}dx$，

解 由 3.2.2 節例題 6 知 $\int \frac{x+3}{x^2+4x+5}dx$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)+\tan^{-1}(x+2)+k_1\text{ 。}$$

又，令 $u=(x^2+4x+5)$，則 $\frac{1}{2}du=(x+2)\,dx$，

$$\int \frac{x+2}{(x^2+4x+5)^2}dx=\int \frac{1}{u^2}\cdot\frac{1}{2}du$$

$$=-\frac{1}{2u}+k_2$$

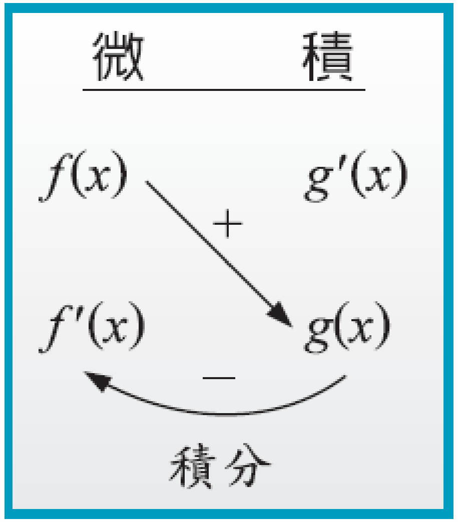
$$=-\frac{1}{2(x^2+4x+5)}+k_2\text{ 。}$$

所以原式

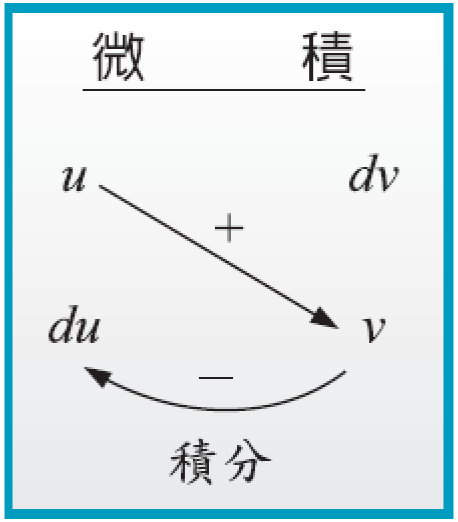
$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)+\tan^{-1}(x+2)-\frac{1}{2(x^2+4x+5)}+k\text{ 。}$$

3.4 分部積分法

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,dx$$



$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$



例題 1

求 $\int xe^x\,dx$。

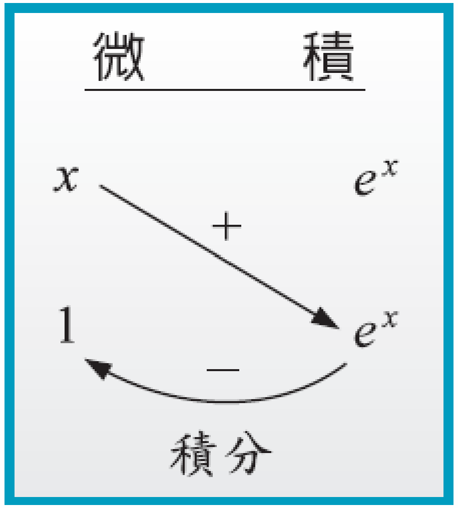
解 令 $u=x$，$dv=e^x\,dx \Rightarrow du=dx$，$v=e^x$

或 $f(x)=x$，$g'(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=1$，$g(x)=e^x$

則 $\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx$

$$= xe^x - e^x + c$$

$$= e^x(x-1)+c$$ 。



例題 2

求 $\int \ln x \, dx$。

解

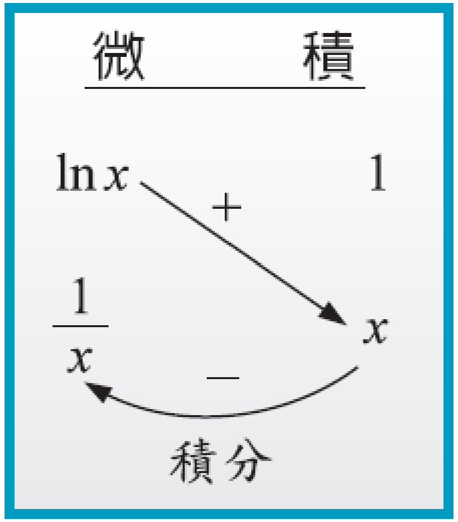
令 $u = \ln x$，$dv = dx \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}dx$，$v = x$

或 $f(x) = \ln x$，$g'(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$，$g(x) = x$

則 $\int \ln x dx = (\ln x)(x) - \int (x)\left(\dfrac{1}{x}dx\right)$

$= x\ln x - \int 1dx$

$= x\ln x - x + c$。



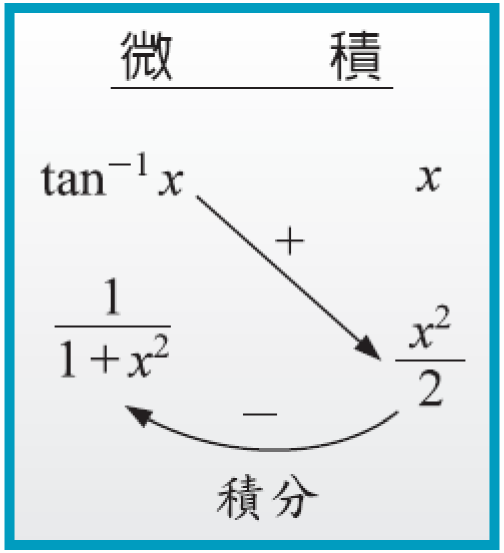
例題 3

求 $\int x\tan^{-1}x\,dx$。

解

令 $u=\tan^{-1}x$，$dv=xdx \Rightarrow du=\dfrac{1}{1+x^2}dx$，$v=\dfrac{x^2}{2}$

或 $f(x)=\tan^{-1}x$，$g'(x)=x \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，$g(x)=\dfrac{x^2}{2}$



解

則 $\int x\tan^{-1}x\,dx$

$$=(\tan^{-1}x)\left(\frac{x^2}{2}\right)-\int\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{1}{1+x^2}dx\right)$$

$$=\frac{x^2}{2}\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\int\frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\tan^{-1}x-\frac{1}{2}[x-\tan^{-1}x]+c$$

$$=\frac{1+x^2}{2}\tan^{-1}x-\frac{1}{2}x+c$$ 。

例題 4

求 $\int x^2 \sin x \, dx$。

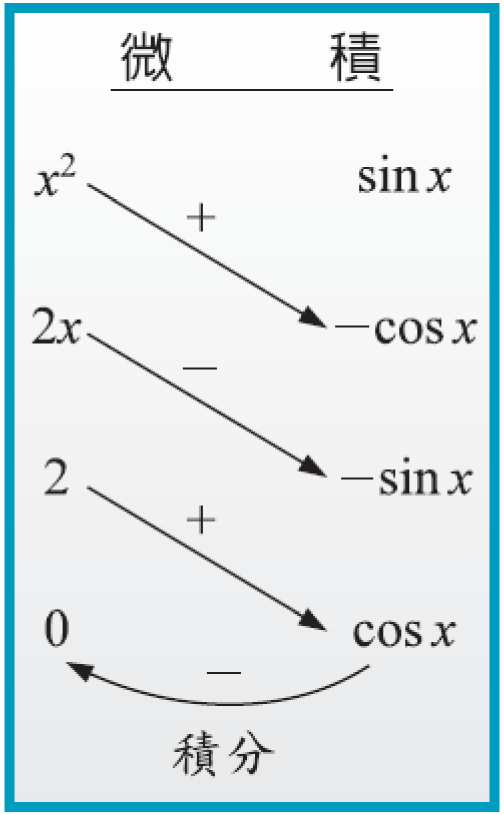
解 令 $f(x)=x^2$，$g'(x)=\sin x$，依序列出 $f(x)$ 及其三次導函數，如左表左行，$g'(x)$ 及其三次反導函數如左表右行。

則 $\int x^2 \sin x \, dx$

$$=+(x^2)(-\cos x)-(2x)(-\sin x)+(2)(\cos x)-\int 0 \, dx$$

$$=-x^2 \cos x+2x \sin x+2 \cos x+c$$

$$=(2-x^2)\cos x+2x \sin x+c$$ 。



例題 5

求 $\int x^3 e^{-2x}\,dx$。

解 令 $f(x)=x^3$，$g'(x)=e^{-2x}$，

則 $\int x^3 e^{-2x}\,dx$

$$=+(x^3)\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)-(3x^2)\left(\frac{1}{4}e^{-2x}\right)+(6x)\left(-\frac{1}{8}e^{-2x}\right)$$

$$-(6)\left(\frac{1}{16}e^{-2x}\right)+\int 0\,dx$$

$$=-\frac{x^3}{2}e^{-2x}-\frac{3}{4}x^2e^{-2x}-\frac{6}{8}xe^{-2x}-\frac{6}{16}e^{-2x}+c$$

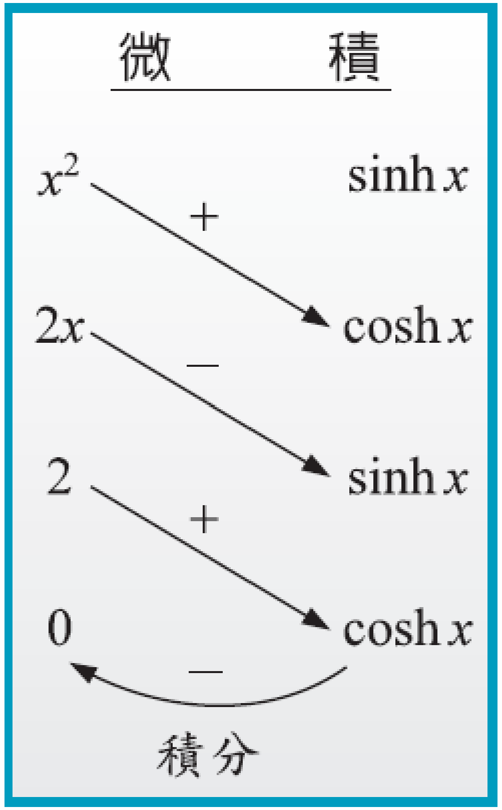
$$=-e^{-2x}\left(\frac{x^3}{2}+\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{3}{8}\right)+c\text{。}$$

微		積
x^3		e^{-2x}
	$+$	
$3x^2$		$-\frac{1}{2}e^{-2x}$
	$-$	
$6x$		$\frac{1}{4}e^{-2x}$
	$+$	
6		$-\frac{1}{8}e^{-2x}$
	$-$	
0		$\frac{1}{16}e^{-2x}$
	$+$ 積分	

例題 6

求 $\int x^2 \sinh x \, dx$。

解 $$\int x^2 \sinh x \, dx = x^2 \cosh x - 2x \sinh x + 2\cosh x + c$$
$$= (x^2+2)\cosh x - 2x \sinh x + c$$ 。

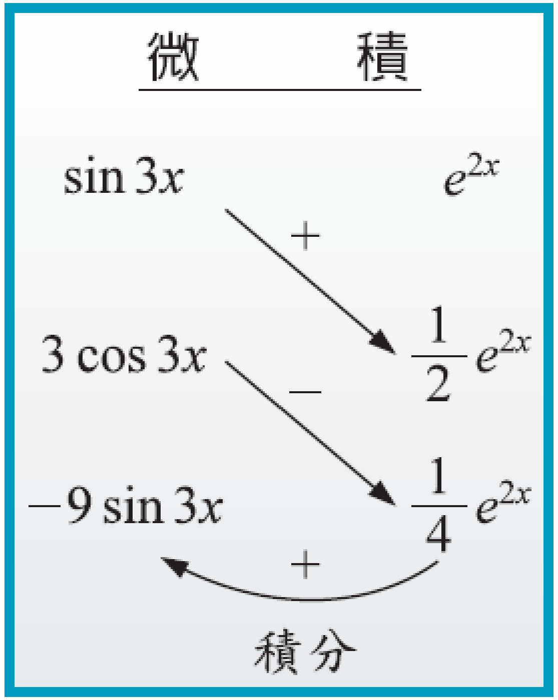


例題 7

求 $\int e^{2x} \sin 3x\, dx$。

解 令 $f(x) = \sin 3x$，$g'(x) = e^{2x}$，

則 $\int e^{2x} \sin 3x\, dx$



(續)

解

$$=+(\sin 3x)\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)-(3\cos 3x)\left(\frac{1}{4}e^{2x}\right)+\int(-9\sin 3x)\left(\frac{1}{4}e^{2x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x-\frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x-\frac{9}{4}\int e^{2x}\sin 3x\,dx$$

移項得：$\left(1+\frac{9}{4}\right)\int e^{2x}\sin 3x\,dx$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\left(\sin 3x-\frac{3}{2}\cos 3x\right)+c_0$$

即 $\int e^{2x}\sin 3x\,dx=\frac{2}{13}e^{2x}\left(\sin 3x-\frac{3}{2}\cos 3x\right)+c$。

3.5 三角函數的積分

例題 1

求 $\int \sin^5 x \cos^4 x \, dx$。

解 原式 $= \int \sin^4 x \cos^4 x \sin x \, dx$

$$= \int (\sin^2 x)^2 \cos^4 x \sin x \, dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^4 x \sin x \, dx$$ 。

(續)

解

令 $u=\cos x \Rightarrow \sin x\,dx=-du$，

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= -\int (1-u^2)^2 \cdot u^4\,du \\
&= -\int (1-2u^2+u^4)\,u^4\,du \\
&= -\int (u^4-2u^6+u^8)\,du \\
&= -\left(\frac{1}{5}u^5-\frac{2}{7}u^7+\frac{1}{9}u^9\right)+c \\
&= -\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{7}\cos^7 x-\frac{1}{9}\cos^9 x+c \text{ 。}
\end{aligned}
$$

例題 2

求 $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$。

解

$$\text{原式} = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, dx$$
$$= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx \text{。}$$

令 $u = \sin x \Rightarrow \cos x \, dx = du$，

$$\text{原式} = \int u^2 (1 - u^2) \, dx$$
$$= \int (u^2 - u^4) \, du$$
$$= \frac{1}{3} u^3 - \frac{1}{5} u^5 + c$$
$$= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + c \text{。}$$

例題 3

求 $\int \sin^5 x \cos^3 x \, dx$。

解 **解法一：**

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \sin^5 x \cos^2 x \cos x \, dx \\
&= \int \sin^5 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx \text{。}
\end{aligned}
$$

令 $u = \sin x \Rightarrow \cos x \, dx = du$，

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int u^5 (1 - u^2) \, du \\
&= \int (u^5 - u^7) \, du \\
&= \frac{1}{6} u^6 - \frac{1}{8} u^8 + c_1 \\
&= \frac{1}{6} \sin^6 x - \frac{1}{8} \sin^8 x + c_1 \text{。}
\end{aligned}
$$

(續)

解

解法二：

$$\text{原式} = \int \sin^4 x \cos^3 x \sin x \, dx$$
$$= \int (\sin^2 x)^2 \cos^3 x \sin x \, dx$$
$$= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^3 x \sin x \, dx \text{。}$$

令 $u = \cos x \Rightarrow \sin x \, dx = -du$，

$$\text{原式} = -\int (1 - u^2)^2 u^3 \, du$$
$$= -\int (1 - 2u^2 + u^4) u^3 \, du$$
$$= -\int (u^3 - 2u^5 + u^7) \, du$$
$$= -\left(\frac{u^4}{4} - \frac{u^6}{3} + \frac{u^8}{8}\right) + c_2$$
$$= -\frac{1}{4}\cos^4 x + \frac{1}{3}\cos^6 x - \frac{1}{8}\cos^8 x + c_2 \text{。}$$

例題 4

$$\int \sin^2 x\, dx$$

$$\int \cos^2 x\, dx$$

解

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + c \text{。}$$

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + c \text{。}$$

例題 5

求 $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$。

解 **解法一：**

$$原式 = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} \, d$$

$$= \frac{1}{4} \int (1-\cos^2 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(1 - \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 4x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int (1-\cos 4x) \, dx$$

$$= \frac{1}{8} \left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) + c \text{。}$$

(續)

解

解法二：

$$原式 = \int (\sin x \cos x)^2 \, dx$$

$$= \int \left(\frac{2 \sin x \cos x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} \, dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) + c。$$

例題 6

求 $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$。

解

$$\text{原式} = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+\cos 2x)^2\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[x+\frac{\sin 2x}{2}-\frac{1}{2}\int \cos^2 2x\, d(2x)-\frac{1}{2}\int \cos^3 2x\, d(2x)\right]$$

(續)

解

$$=\frac{1}{8}\left\{x+\frac{\sin 2x}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(2x+\frac{\sin 4x}{2}\right)\right]\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left(\sin 2x-\frac{\sin^3 2x}{3}\right)\right\}+k\text{ 。}$$

其中 $\displaystyle\int \cos^3 2x\,d(2x)=\int \cos^3 u\,du\Big|_{u=2x}$

$$=\int \cos^2 u\cdot\cos u\,du\Big|_{u=2x}$$

$$=\int (1-\sin^2 u)\,d\sin u\Big|_{u=2x}$$

$$=\sin u-\frac{\sin^3 u}{3}+c_1\Big|_{u=2x}$$

$$=\sin 2x-\frac{\sin^3 2x}{3}+c_1\text{ 。}$$

(續)

解

另外，由例題 4

已知 $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + c_2$，

所以，$\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}\left(u + \frac{\sin 2u}{2}\right) + c_2$，

令 $u = 2x$，即得

$$\int \cos^2 2x\,d(2x) = \frac{1}{2}\left(2x + \frac{\sin 4x}{2}\right) + c_2 \text{。}$$

例題 7

求 $\int \tan^3 x \sec^4 x \, dx$。

解

原式 $= \int \tan^2 x \sec^3 x \sec x \tan x \, dx$

$= \int (\sec^2 x - 1) \sec^3 x \sec x \tan x \, dx$。

令 $u = \sec x \Rightarrow \sec x \tan x \, dx = du$，

原式 $= \int (u^2 - 1) u^3 \, du$

$= \int (u^5 - u^3) \, du$

$= \dfrac{1}{6} u^6 - \dfrac{1}{4} u^4 + c$

$= \dfrac{1}{6} \sec^6 x - \dfrac{1}{4} \sec^4 x + c$。

例題 8

求 $\int \sqrt[3]{\tan x} \cdot \sec^4 x\, dx$。

解 原式 $= \int \tan^{\frac{1}{3}} x \sec^2 x \sec^2 x\, dx$

$$= \int \tan^{\frac{1}{3}} x (\tan^2 x + 1)\, d\tan x \quad \left(= \int u^{\frac{1}{3}} (u^2 + 1)\, du \Big|_{u = \tan x} \right)$$

$$= \frac{3}{10} \tan^{\frac{10}{3}} x + \frac{3}{4} \tan^{\frac{4}{3}} x + c$$ 。

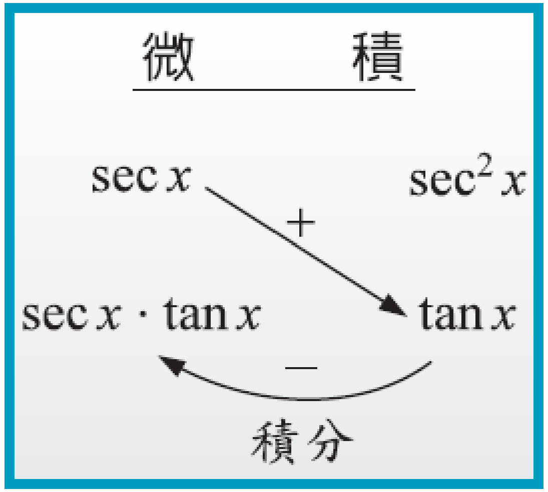
例題 9

求 $\int \sec^3 x\,dx$ 及 $\int \tan^2 x \sec x\,dx$。

解 令 $u=\sec x$，$dv=\sec^2 x\,dx$

$\Rightarrow du=\sec x\tan x\,dx$，$v=\tan x$。

$$\begin{aligned}
&\int \sec^3 x\,dx \\
&=\sec x\tan x-\int \tan^2 x\sec x\,dx \\
&=\sec x\tan x-\int (\sec^2 x-1)\sec x\,dx \\
&=\sec x\tan x-\int \sec^3 x\,dx+\int \sec x\,dx \\
&=\sec x\tan x-\int \sec^3 x\,dx+\ln|\sec x+\tan x|\text{。}
\end{aligned}$$



(續)

解 移項整理得

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + c_1，$$

且 $\int \tan^2 x \sec x\,dx$

$$= \int (\sec^2 x - 1)\sec x\,dx$$

$$= \int \sec^3 x\,dx - \int \sec x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) - \ln|\sec x + \tan x| + c_2$$

$$= \frac{1}{2}(\sec x \tan x - \ln|\sec x + \tan x|) + c_2。$$

3.6 三角代換法

例題 1

求 $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$。

解

令 $x=2\sin\theta$，其中 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$，(你注意到 θ 號嗎？為什麼呢？)

則 $dx=2\cos\theta\,d\theta$。

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int \frac{4\sin^2\theta}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$$

$$=4\int \sin^2\theta\,d\theta=4\int \frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$=2\left(\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right)+c=2\theta-\sin 2\theta+c$$

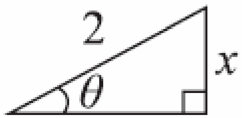
$$=2\theta-2\sin\theta\cos\theta+c$$ 。

(續)

解 既然 $x=2\sin\theta$，所以 $\sin\theta=\dfrac{x}{2}$，$\theta=\sin^{-1}\dfrac{x}{2}$，

且 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$，

(為什麼 $\cos\theta$ 不是 $\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$ 呢？)

或由 

知 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2}$，

故 $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx=2\sin^{-1}\frac{x}{2}-2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}+c$

$$=2\sin^{-1}\frac{x}{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+c\text{。}$$

例題 2

求 $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-3x^2}}dx$。

解 原式 $=\int \frac{x^2}{\sqrt{3\left(\frac{4}{3}-x^2\right)}}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{x^2}{\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-x^2}}dx$，

令 $x=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta$，再以類似例題 1 之方法解之。

例題 3

求 $\int \sqrt{4-9x^2}\,dx$。

解

$$\int \sqrt{4-9x^2}\,dx=\int \sqrt{9\left(\frac{4}{9}-x^2\right)}\,dx=3\int \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2-x^2}\,dx，$$

令 $x=\frac{2}{3}\sin\theta$，其 中 $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，

則 $dx=\frac{2}{3}\cos\theta\,d\theta$。

$$\begin{aligned}\int \sqrt{4-9x^2}\,dx&=3\int \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2\sin^2\theta}\cdot\frac{2}{3}\cos\theta\,d\theta\\&=2\int \sqrt{\left(\frac{2}{3}\cos\theta\right)^2}\cos\theta\,d\theta\\&=2\int \frac{2}{3}\cos^2\theta\,d\theta\end{aligned}$$

(續)

解

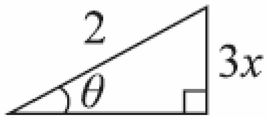
$$=\frac{4}{3}\int\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\left(\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right)+c$$

$$=\frac{2}{3}\theta+\frac{1}{3}\sin 2\theta+c$$

$$=\frac{2}{3}\theta+\frac{2}{3}\sin\theta\cos\theta+c\text{。}$$

因 $x=\frac{2}{3}\sin\theta$，$\sin\theta=\frac{3}{2}x\Rightarrow$



$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{\sqrt{4-9x^2}}{2}\text{，}$$

所以，$\int\sqrt{4-9x^2}\,dx=\frac{2}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3}{2}x\right)+\frac{1}{2}x\sqrt{4-9x^2}+c$。

例題 4

求 $\displaystyle\int \frac{dx}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}$。

解 令 $x=3\tan\theta$，其中 $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，

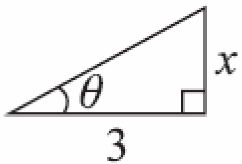
則 $dx=3\sec^2\theta\,d\theta$，

$$原式=\int \frac{dx}{(\sqrt{9+x^2})^3}=\int \frac{3\sec^2\theta\,d\theta}{(\sqrt{9+9\tan^2\theta})^3}$$

$$=\int \frac{3\sec^2\theta}{27\sec^3\theta}d\theta=\frac{1}{9}\int \frac{1}{\sec\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{9}\int \cos\theta\,d\theta=\frac{1}{9}\sin\theta+c。$$

因為 $\tan\theta=\dfrac{x}{3}$，由



得知 $\sin\theta=\dfrac{x}{\sqrt{9+x^2}}$，

所以 $\displaystyle\int \frac{dx}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}=\frac{x}{9\sqrt{9+x^2}}+c$。

例題 5

求 $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}\,dx$。

解 令 $x=2\sec\theta$，其中 $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ 或 $\pi\le\theta<\frac{3\pi}{2}$，

則 $dx=2\sec\theta\tan\theta\,d\theta$。

$$\text{原式}=\int \frac{\sqrt{4\sec^2\theta-4}}{4\sec^2\theta}\cdot 2\sec\theta\tan\theta\,d\theta$$

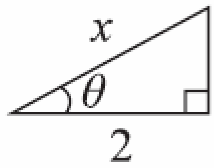
$$=\int \frac{\tan^2\theta}{\sec\theta}\,d\theta=\int \frac{(\sec^2\theta-1)}{\sec\theta}\,d\theta$$

$$=\int (\sec\theta-\cos\theta)\,d\theta$$

$$=\ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|-\sin\theta+c$$ 。

(續)

解

因為 $\sec\theta=\dfrac{x}{2}$，由 

得知

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\text{，}\tan\theta=\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\text{，}$$

所以 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}dx=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right|-\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}+c$。

例題 6

求 $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+4x+4}}$。

解 原式 $=\int \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx=\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+1}} dx$，

令 $u=x+1$，則 $du=dx$。

原式 $=\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} du$，

再令 $u=\tan\theta$，其中 $\frac{-\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$，

則 $du=\sec^2\theta\, d\theta$。

(續)

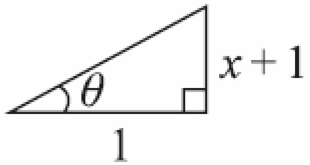
解

$$\text{原式}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{\sqrt{\tan^2\theta+1}}\sec^2\theta\,d\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\sec^2\theta}{\sec\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\sec\theta\,d\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sec\theta+\tan\theta|+c\text{。}$$

因為 $u=x+1=\tan\theta$，

由



得知 $\sec\theta=\frac{\sqrt{(x+1)^2+1^2}}{1}=\sqrt{x^2+2x+2}$，

所以 $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+4x+4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{x^2+2x+2}+x+1\right|+c$。

3.7 積分表的使用

在本書的附錄裡，我們將一些較常用的不定積分列成一積分表，讀者可以運用此積分表的積分公式，迅速的求出不定積分之結果。例如：想求出 $\int \cos^{-1} x\, dx$ 時，可直接利用積分表的公式 (30) 知

$$\int \cos^{-1} x\, dx = x \cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + C\text{。}$$

又例如：想求出 $\int \sin^4 x\, dx$ 時，可利用積分表的公式 (18) 將積分式 k 以 4 代入，把原積分式降次成 $\int \sin^2 x\, dx$，再度使用積分表之公式 (18) 化簡之，過程如下：

$$\int \sin^4 x\,dx = -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{4}\left[-\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}\int dx\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x - \frac{3}{8}\sin x\cos x + \frac{3}{8}x + C\text{。}$$

有些不定積分表面上好像與積分表的公式不同，此時我們可藉由變數變換的技巧，將所欲求的不定積分化成積分表的形式，再套用積分表的公式。例如：想求出 $\int \sqrt{x^2-4x+13}\,dx$ 時，由於 $\sqrt{x^2-4x+13}=\sqrt{(x-2)^2+3^2}$，所以先作變數變換，令 $u=x-2$，$du=dx$，則 $\int \sqrt{x^2-4x+13}\,dx$ 可化成 $\int \sqrt{u^2+3^2}\,du$，此時即可利用積分表的公式 (43)，得

$$\int \sqrt{u^2+3^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+3^2} + \frac{3^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+3^2}\right| + C\text{。}$$

故

$$\int \sqrt{x^2 - 4x + 13}\, dx$$
$$= \frac{x-2}{2}\sqrt{(x-2)^2 + 9} + \frac{9}{2}\ln\left|x - 2 + \sqrt{(x-2)^2 + 9}\right| + C \text{。}$$