

# 電荷、電力與電場

## *University Physics*

### *Chapter 12*

授課教師：陳 柏 穎

# Key Concepts

- 12.1 電現象的發現
- 12.2 極化與感應
- 12.3 點電荷之庫侖定律：電荷之數量化
- 12.4 電荷量子化
- 12.5 靜電荷之電場
- 12.6 點電荷分佈所建立的電場
- 12.7 電力線
- 12.8 一般分子的電荷分佈：電偶極
- 12.9 連續電荷分佈所建立的電場

# *Key Concepts*

---

- 12.10 高斯定律
- 12.11 利用高斯定律計算電場大小
- 12.12 導 體

# 12.1 電現象的發現

- 電的現象之發現始於琥珀，一種黃棕色，很漂亮色的裝飾品，如圖12.1
- 古希臘人在擦拭琥珀時，因劇烈的摩擦，而意外發現經過摩擦後的琥珀可吸住微小東西如稻草、穀物的殼等。
- 電 (electricity) 的觀念與這個字本身起緣於17世紀時，人們觀察到其它物質有類似琥珀現象，西元1600年，大約比牛頓早100年，文藝復興時期的一位科學家，也是醫生 — 吉爾伯特 (William Gilbert; 1540~1603) 發現：玻璃和其它物質經絲綢摩擦後都能吸住一些微小碎片，正如前面敘述過的琥珀一樣。這項發現他稱之為物質被電化 (electrified)，此即希臘文“變成像琥珀”的意思。而電子 (electron) 為希臘文中的“琥珀”(amber)



圖 12.1

# 電現象的發現 2

- 拿兩塊磁鐵，或拿兩個經過電化的物質來玩，你將會發現它們有明顯的不同。任二塊磁鐵不是互相吸引就是互相排斥；這與磁鐵本身端點的方向有關，參考圖12.2。

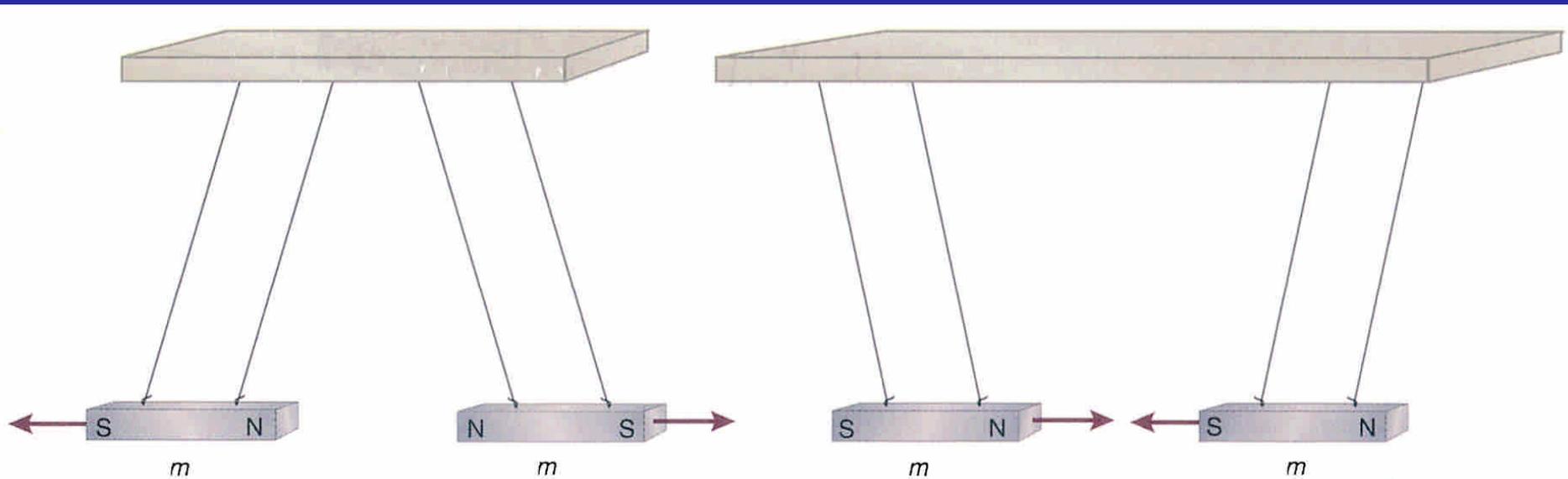


圖 12.2 兩塊磁鐵的相吸或相斥是由它們接近的末端而定

# 電現象的發現3

- 當你將兩塊經過摩擦的琥珀靠近時，你會發現它們總是互相排斥。縱使，改變它們的端點方向還是互相排斥，如圖12.3。

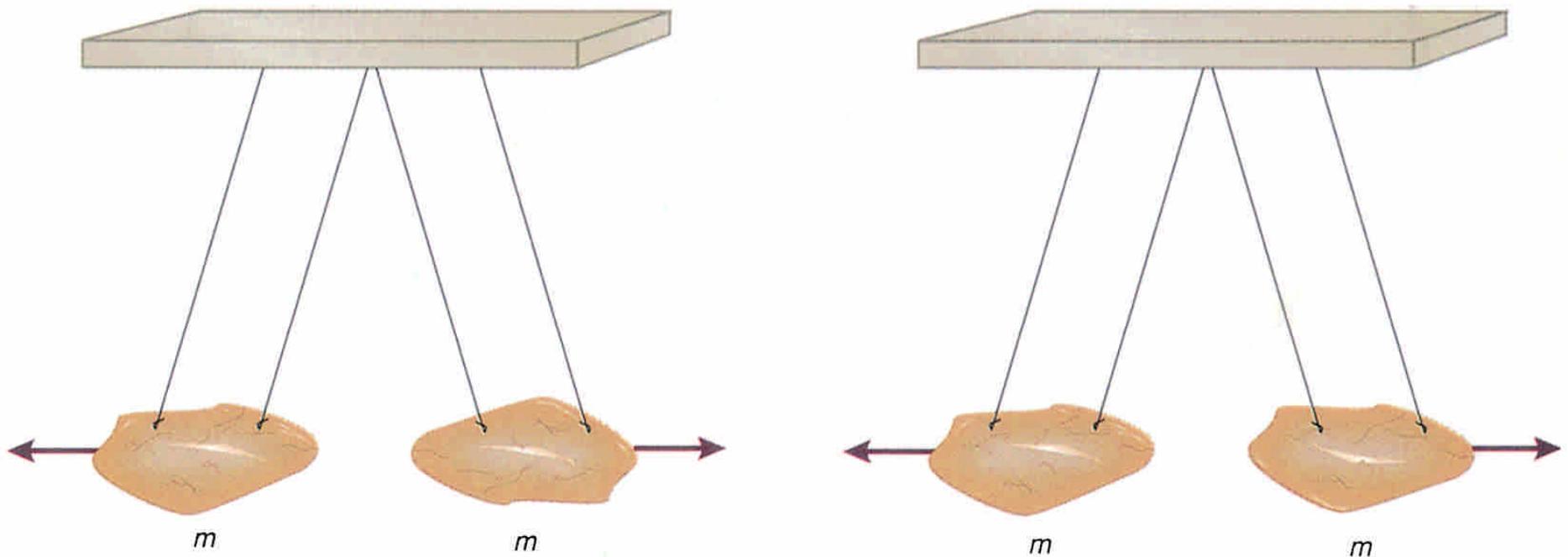


圖 12.3 兩塊經過摩擦後的琥珀總是相斥與它們面對面的方式無關

# 電現象的發現4

- 法國科學家杜菲 (Charles-Francois Cisternay Dufay; 1698-1739) 在1733 發現兩根與絲綢摩擦過的玻璃棒會互相排斥 (見圖12.4)

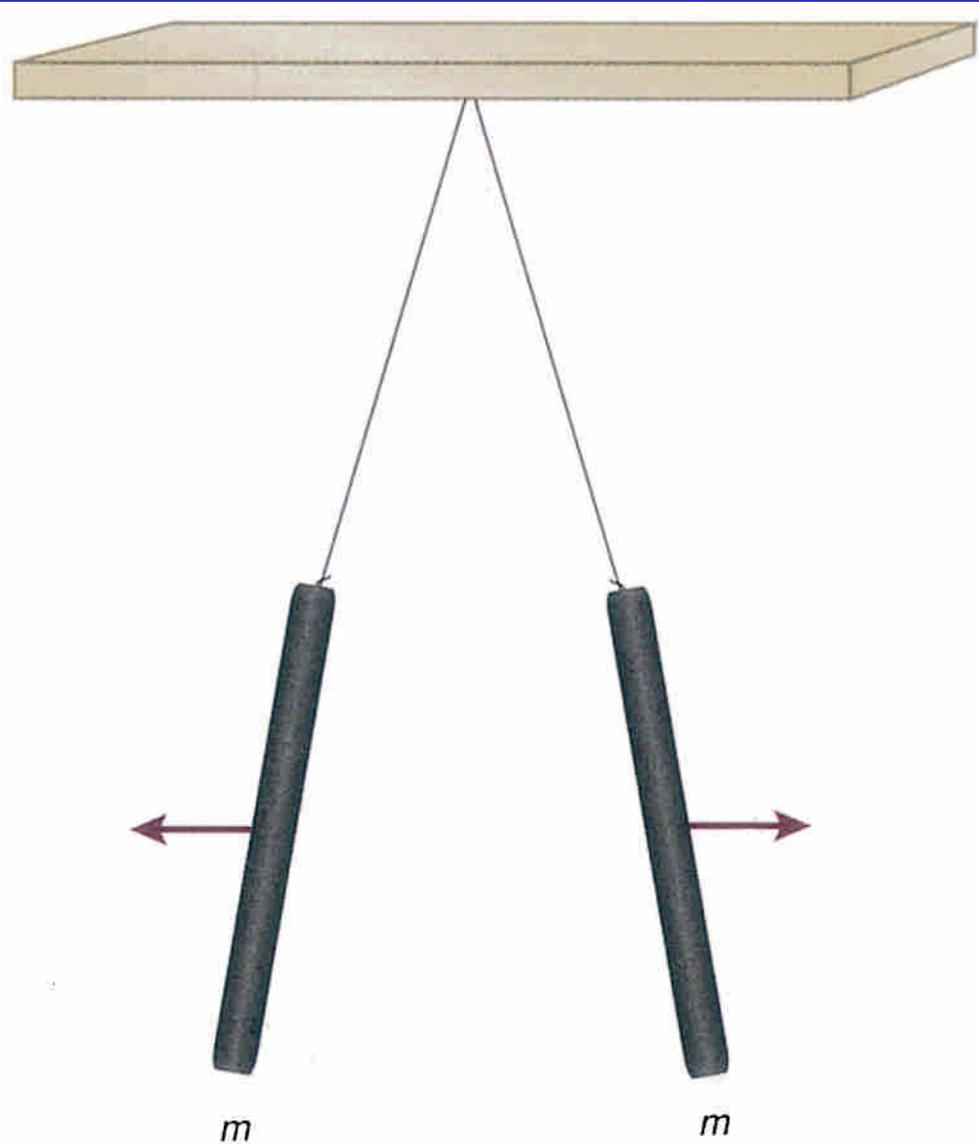


圖 12.4 二根經絲綢摩擦後的玻璃棒互相排斥

# 電現象的發現5

- 法國科學家杜菲 (Charles-Francois Cisternay Dufay; 1698-1739) 在1733發現兩根與毛皮摩擦過的二根塑膠棒或琥珀棒也互相排斥 (見圖12.5)。

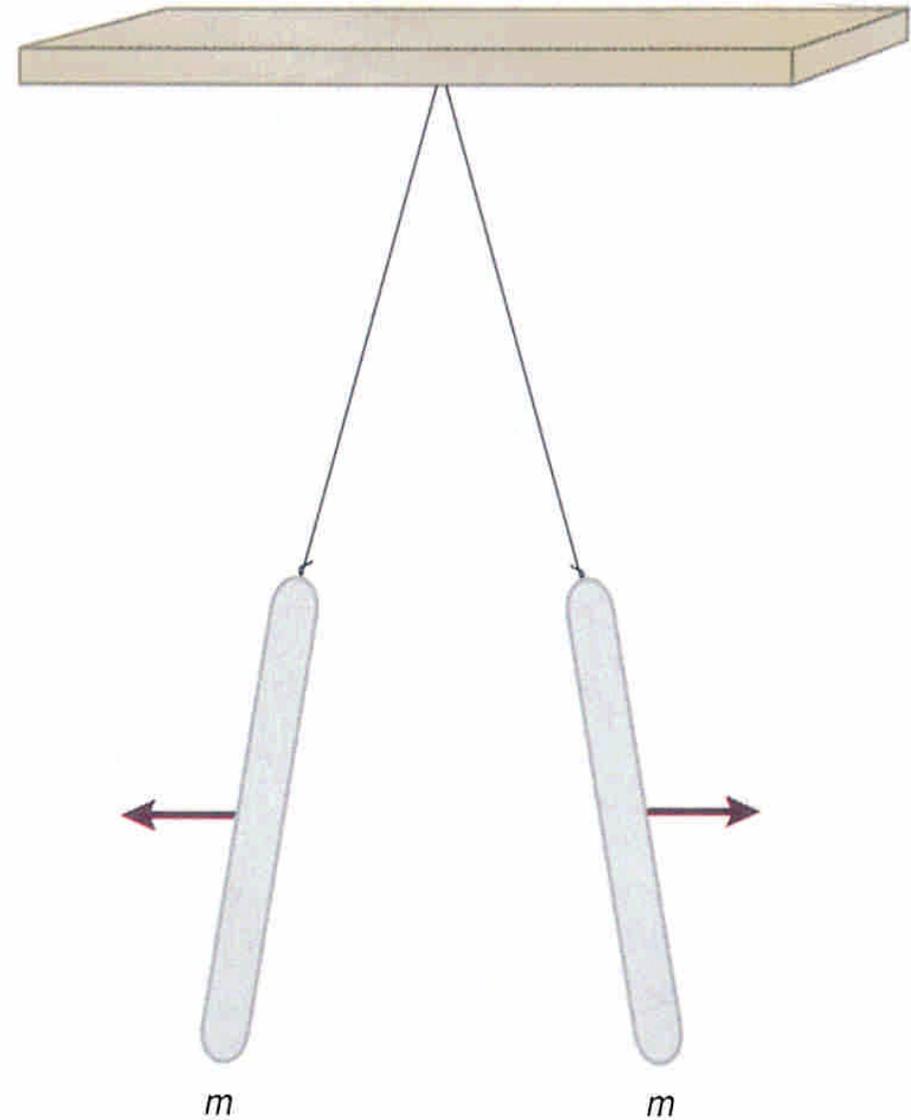


圖 12.5 兩根經毛皮摩擦後的塑膠棒或琥珀棒互相排斥

# 電現象的發現6

- 經過電化的玻璃棒與電化的塑膠棒或琥珀棒（見圖 12.6）卻互相吸引。
- 換句話說，二相同的材質經過同一電化過程，彼此間總是互相排斥。而不同材質經過不同電化過程（與不同物質摩擦），有可能互相排斥或吸引。未經電化的物質，很顯然的，它們不會有作用。
- 因此電力作用有吸引、排斥或零作用。

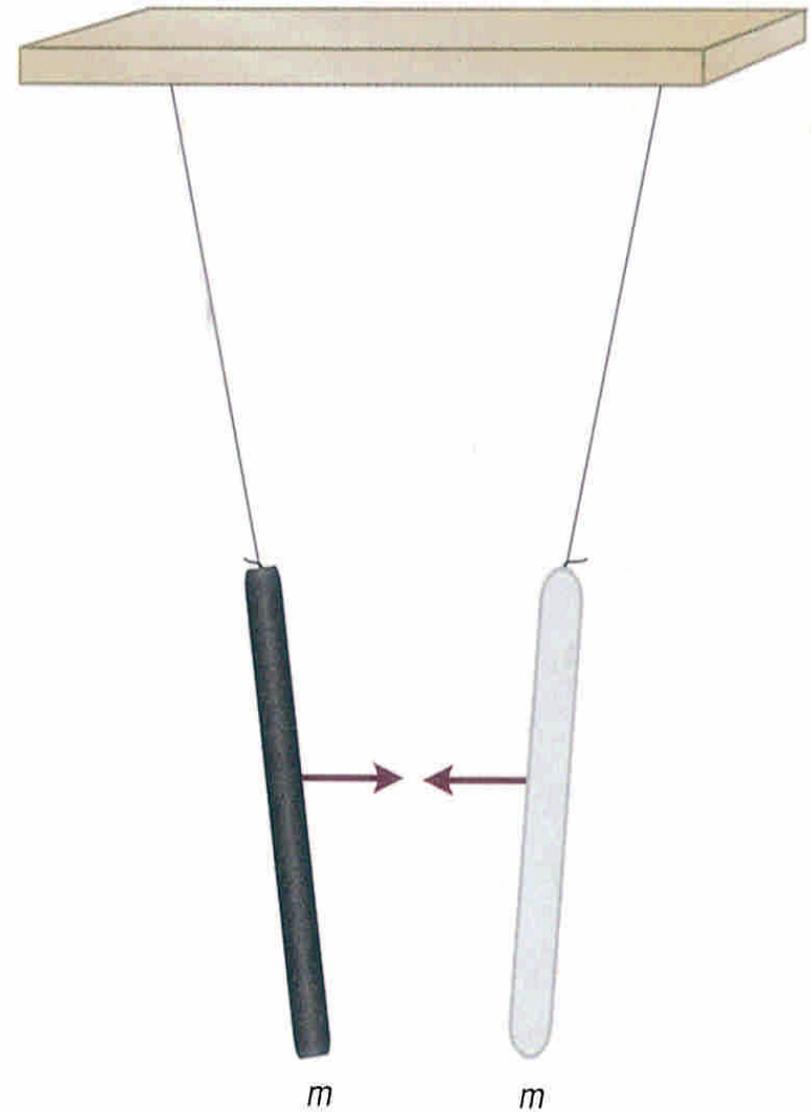


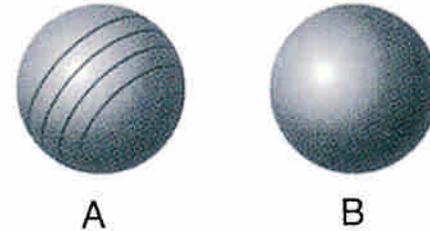
圖 12.6 一根經電化的玻璃棒吸引一根經電化的塑膠棒或琥珀棒

# 電化 1

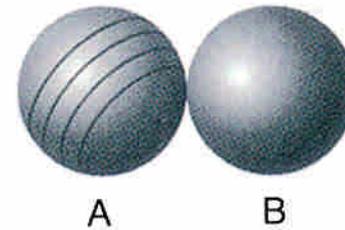
- 一質點或物質若被經絲綢摩擦後的玻璃棒排斥，則我們稱它被**正電化** (positively electrified)。
- 一個質點或物質若被經毛皮摩擦過後的塑膠棒或琥珀排斥，則我們稱它被**負電化** (negatively electrified)。
- 某些物質很容易傳遞此二種電性，我們稱之為**導體** (conductors)。而在某些物質中，這些電性卻不容移動，這類物質被稱為**絕緣體** (insulators)。絕緣體又稱極性物質 (dielec-trics)。
- 電化的狀況可以由帶電體間之作用力大小來決定。
- 兩個不同的電化狀態或特性可以數量化且可以像純量做代數和。
- 我們稱物質的電化特性為電荷 (electrical charge)

# 電化 2

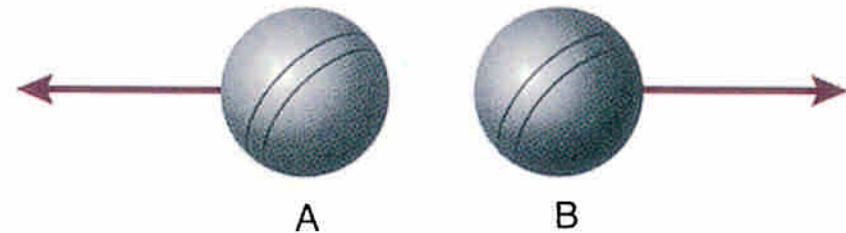
- 如果將一個帶電的導體球與一個相同但未電導體球（見圖 12.7(a)）相接觸後（圖 12.7 (b)），再將它們分開（圖 12.7(c)），我們發現此二導體球都已電化，而且互相排斥。我們可以量測此二導體球相距一特定距離時之排斥力。



(a) 一個電化的導體球與一個未電化的導體球



(b) A、B 二球接觸



(c) 將 A、B 二球分開

圖 12.7

# 電化 3

- 假如再拿來兩個完全相同但未電化的導體球，將它們分別與前二個已電化的導體球接觸，如圖12.8。我們發現有任二導體球在一特定距離的排斥力只有原來已電化之二導體球間之排斥力的四分之一。

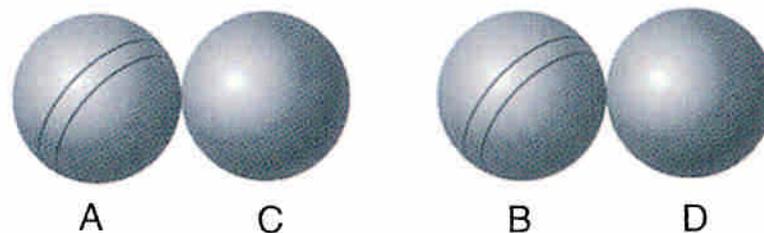


圖 12.8 拿二球與圖 12.7 中之 A、B 二球接觸。



圖 12.9 四球中之任二球互相排斥

- 當我們說一個物體帶正電荷 (positive charge)，是指這個物體的電化性會讓它與經絲綢摩擦過後的玻璃棒相排斥，如圖12.10。
- 當我們說一物體帶負電荷 (negative charge)，是指物體的電化性會讓它與經毛皮摩擦過後的塑膠棒互相排斥，如圖12.11。

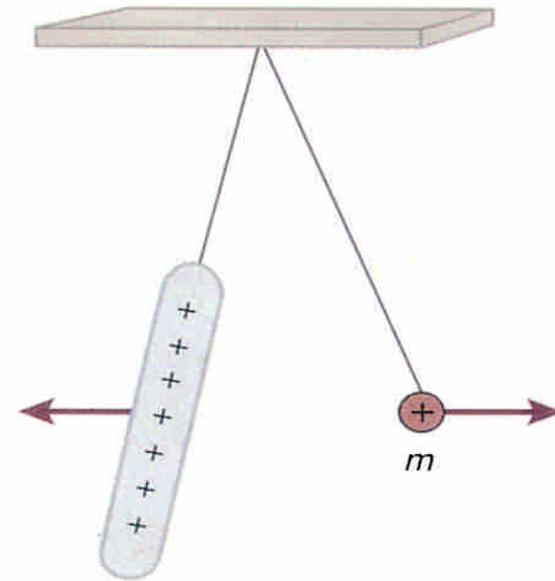


圖 12.10 一正電荷被經絲綢摩擦過的玻璃棒排斥

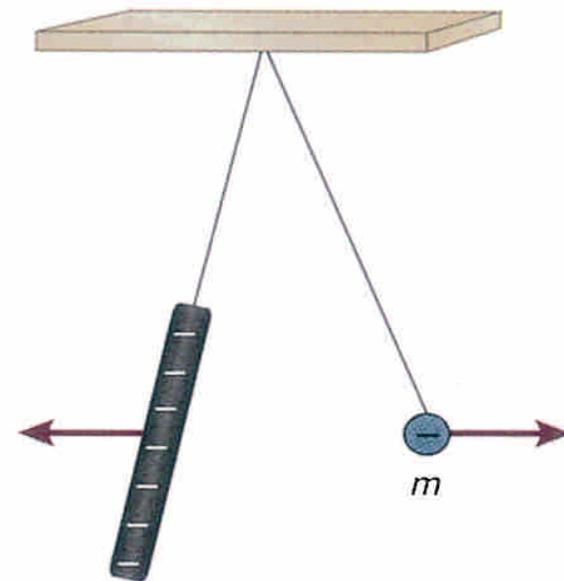


圖 12.11 負電荷被經毛皮摩擦過的塑膠棒排斥

➤ 當二經電化質點間之作用力為排斥力時，我們稱此二質點帶同性電荷 (**like charges**)。任二同性電荷間會產生排斥力，作用於此二電荷的排斥力大小相等（見圖 12.12）。

➤ 假如二電荷之電性不同（一為正，另一為負），則其間的作用力為吸引力（如圖 12.13）。若任二質點具相反電性，我們稱其所帶的電荷為異性電荷 (**unlike charges**)。它們彼此間會有一個大小相等的吸引力。

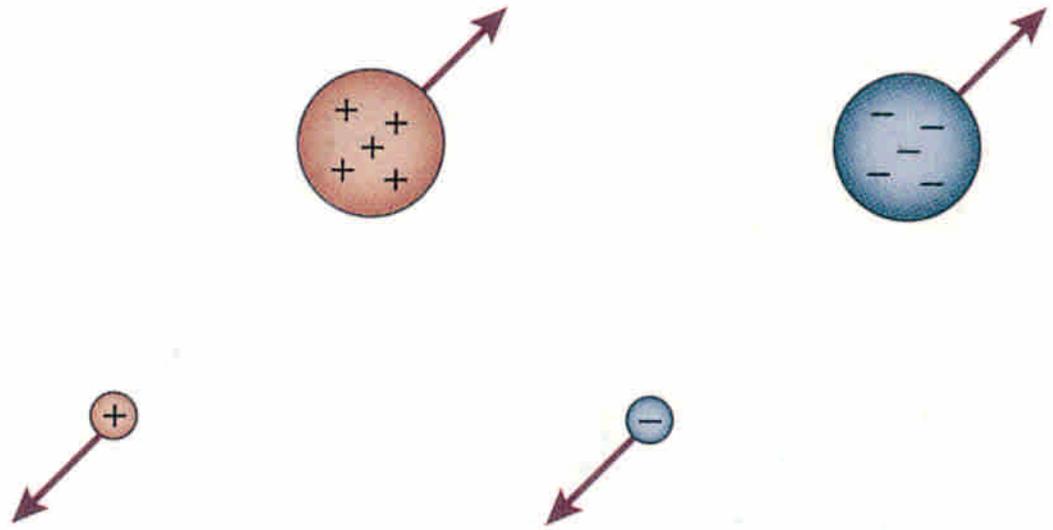


圖 12.12 同性電荷以相同大小之電力互相排斥

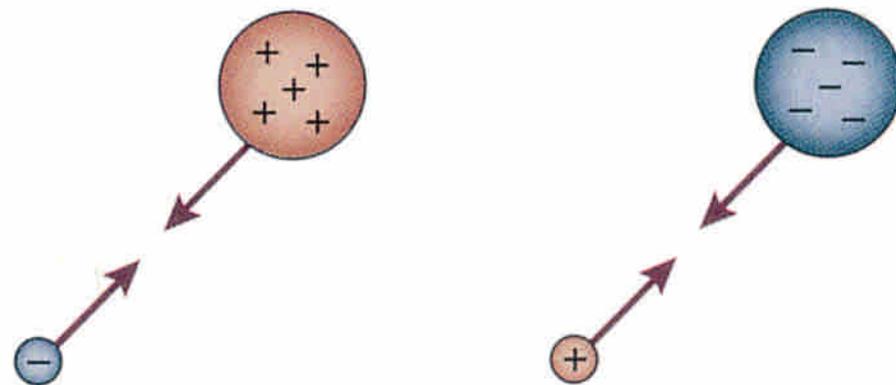


圖 12.13 異性電荷以相同大小之電力互相吸引

# 12.2 極化與感應

➤ 極化  
中性因帶電物體的靠近而產生電荷分離的現象，我們稱之為極化 (polarization)。

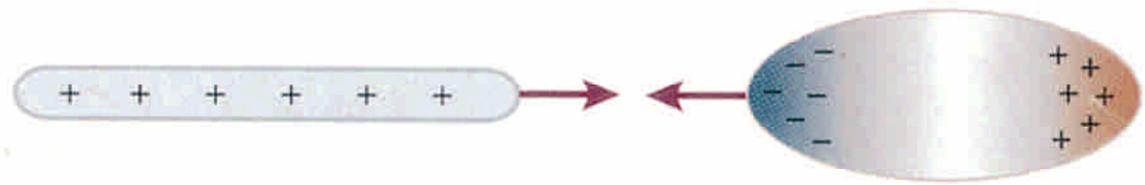


圖 12.14 帶正電之物體對未帶電之導體的吸引。

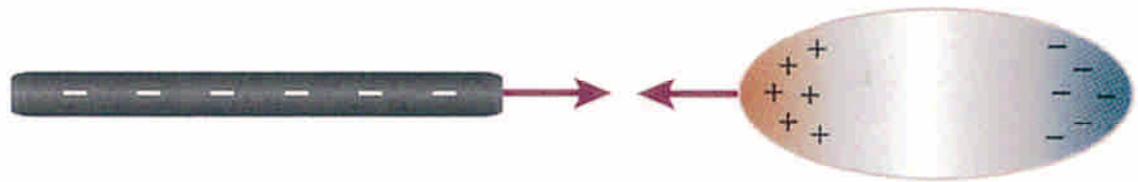


圖 12.15 帶負電之物體對未帶電之導體的排斥

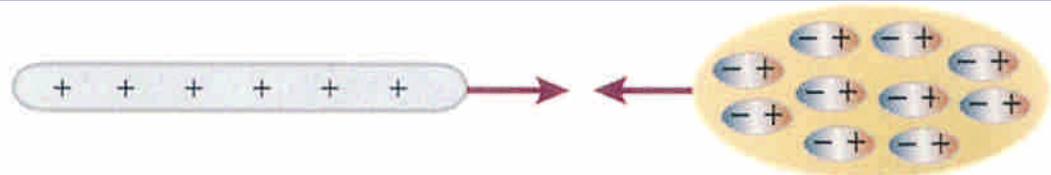


圖 12.16 帶電體對未帶電之絕緣體的吸引

1. 我們拿一個帶負電之物體靠近未帶電之導體。此未帶電之導體被**極化**。電子集體移向導體的遠端，因為這些電子受到帶負電物體的排斥，如圖12.17(a)。

2. 現在拿另一個導體（金屬線）與原來導體接觸而導線的另一端接地球，如圖12.17(b)。電子受負電棒的排斥而逃離至地球上。我們稱之為將**導體接地** (grounding)。

3. 假如將導線移去，電子則找不到回到原來導體的路，所以這個導體現在帶正電荷，而不再呈電中性了，這個過程稱為**感應** (induction)

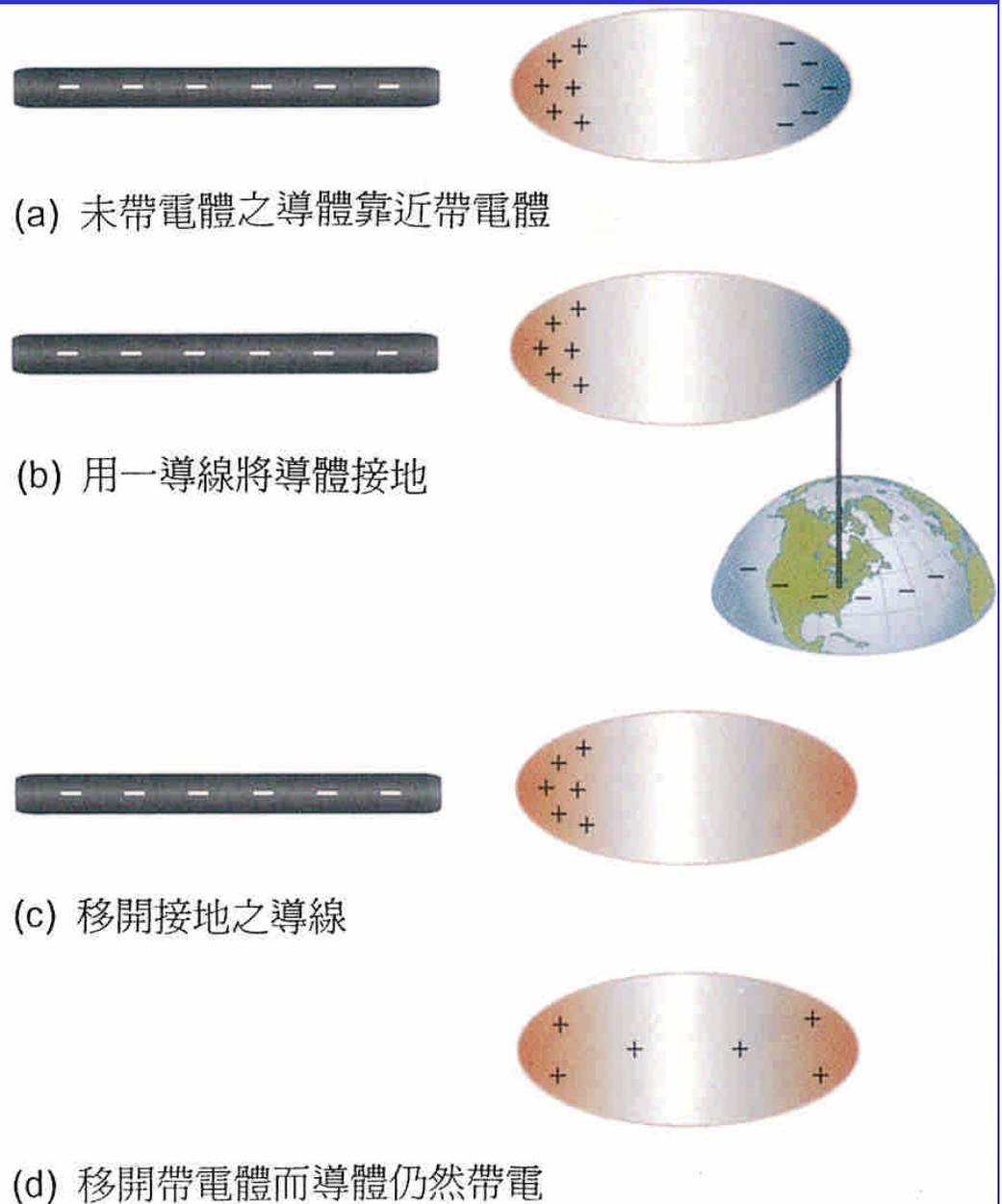


圖 12.17 移開帶電體而導體仍然帶電

# 12.3 點電荷之庫侖定律： 電荷之數量化

➤ 作用於點電荷之電力是平方反比力：

$$F_{\text{elec}} \propto \frac{1}{r^2}$$

➤ 庫侖也發現點電荷 $q$ 與 $Q$ 間彼此作用力的大小與二點電荷大小的乘積成正比。

$$F_{\text{elec}} \propto \frac{|q||Q|}{r^2}$$

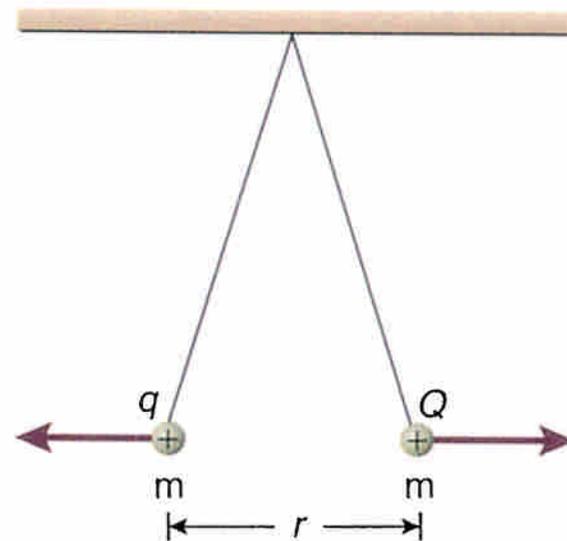


圖 12.18 二電荷間之作用力遵守牛頓第三定律

➤ 在SI單位制中，電荷之單位是由電流 (electric current) 而來。SI單位制之電流單位為安培 (A)。1安培表1庫侖 (C) 的電荷在1秒內流經某一截面。

➤ 在SI單位制中，庫侖定律的所描述二點電荷間電力大小為

$$F_{\text{elec}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q||Q|}{r^2}$$

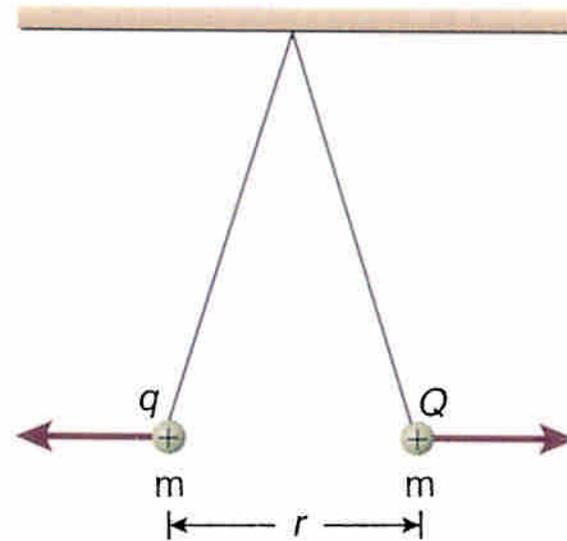


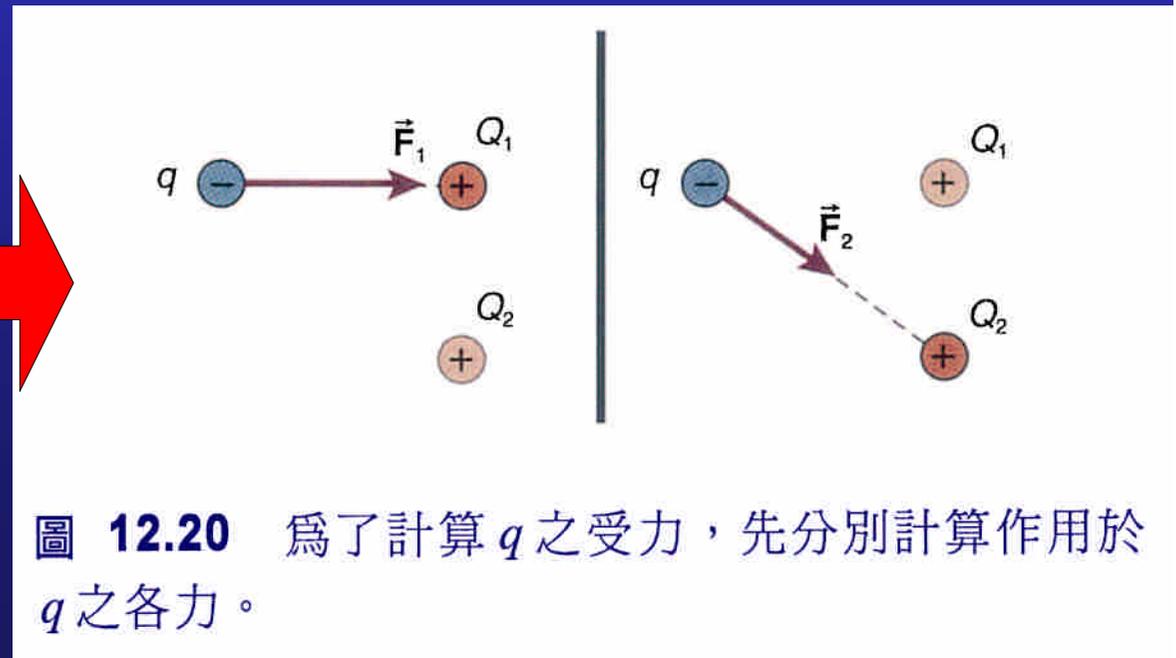
圖 12.18 二電荷間之作用力遵守牛頓第三定律

$$\begin{aligned}\epsilon_0 &= \frac{1}{4\pi(8.987552425 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2)} \\ &\equiv 8.854187817 \dots \times 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2)\end{aligned}$$

稱為真空中之介電常數 (permittivity of free space)。

# 重疊原理 (principle of superposition)

- 假如有多於二個點電荷存在，如圖12.19，實驗上顯示每個電荷所受電力的作用為其它電荷對某一特電荷之作用力的向量和，見圖12.20。



# 重疊原理

- 實驗上顯示每個電荷所受電力的作用為其它電荷對某一特電荷之作用力的向量和，見圖12.20、12.21。
- 這個結果即是所謂重疊原理 (principle of superposition)。

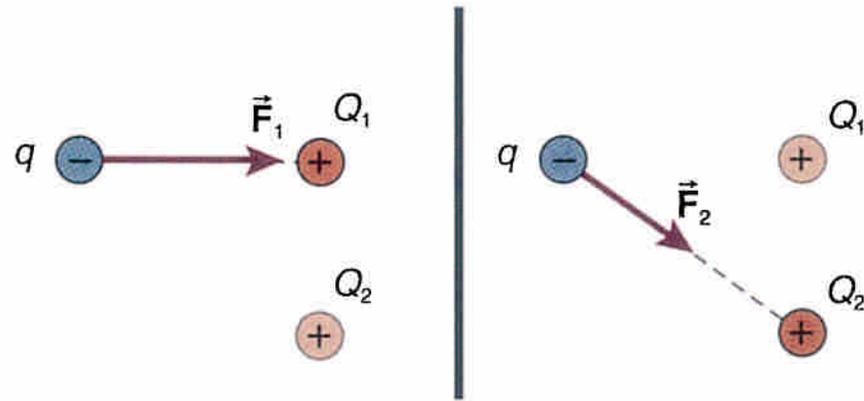


圖 12.20 爲了計算  $q$  之受力，先分別計算作用於  $q$  之各力。

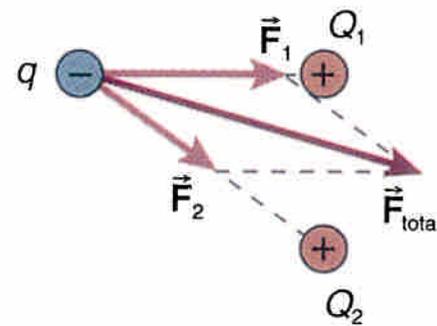
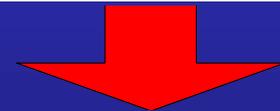


圖 12.21 作用於  $q$  之總力爲各電荷  $Q$  作用於  $q$  之電力的向量和

# 例題 12.1

---

一個之點電荷與另一個之點電荷相距  $15.0 \text{ cm}$ 。

- a. 作用於二點電荷之電力大小為何？
- b. 試繪出二點電荷所受電力方向？

解：

a. 我們可以用庫倫定律 計算其間之作用力



$$\begin{aligned} F_{\text{elec}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q||Q|}{r^2} \\ &= (9.00 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2) \\ &\quad \times \frac{|-2.00 \times 10^{-6} \text{ C}||3.50 \times 10^{-6} \text{ C}|}{(0.150 \text{ m})^2} \\ &= 2.80 \text{ N} \end{aligned}$$

b. 此二點電荷為異性電荷，作用於其間的電力為吸引力，如圖12.22所示。

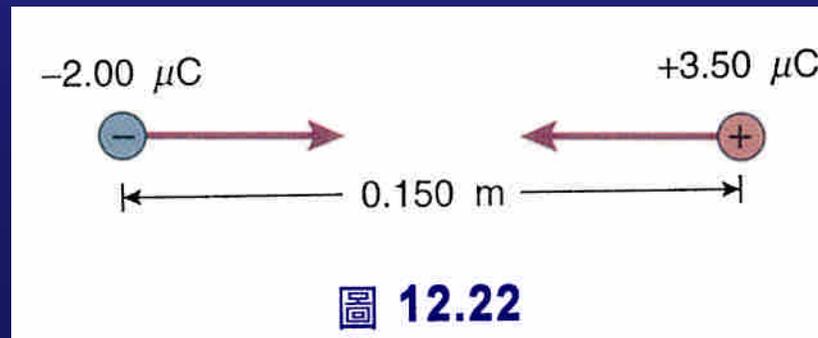


圖 12.22

## 例題 12.2

二點電荷如圖12.23所示。

- 試計算作用於各點電荷之電力，將電力以圖所標之坐標軸用向量表示。
- 此二力為牛頓第三定律之作用力與反作用嗎？

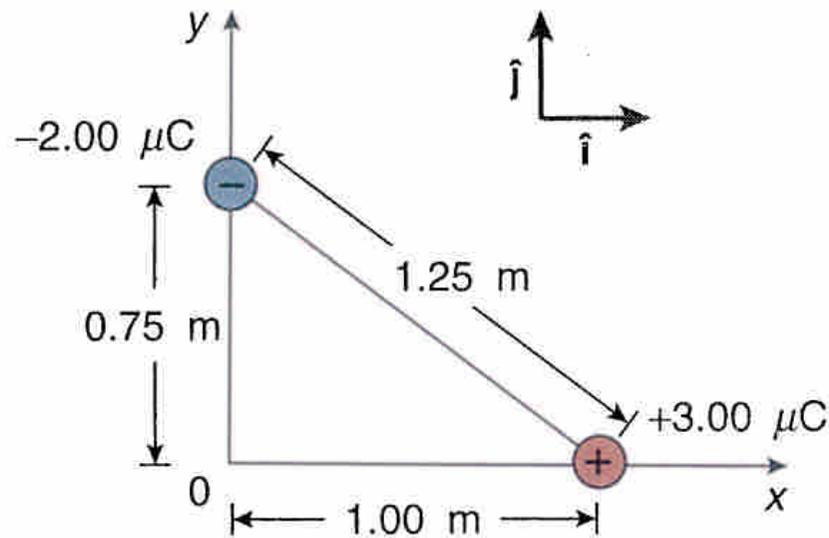


圖 12.23

解：

a. 用庫倫定律解電力大小

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q||Q|}{r^2} \\ &= (9.00 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2) \\ &\quad \times \frac{|-2.00 \times 10^{-6} \text{ C}||3.00 \times 10^{-6} \text{ C}|}{(1.25 \text{ m})^2} \\ &= 3.46 \times 10^{-2} \text{ N} \end{aligned}$$

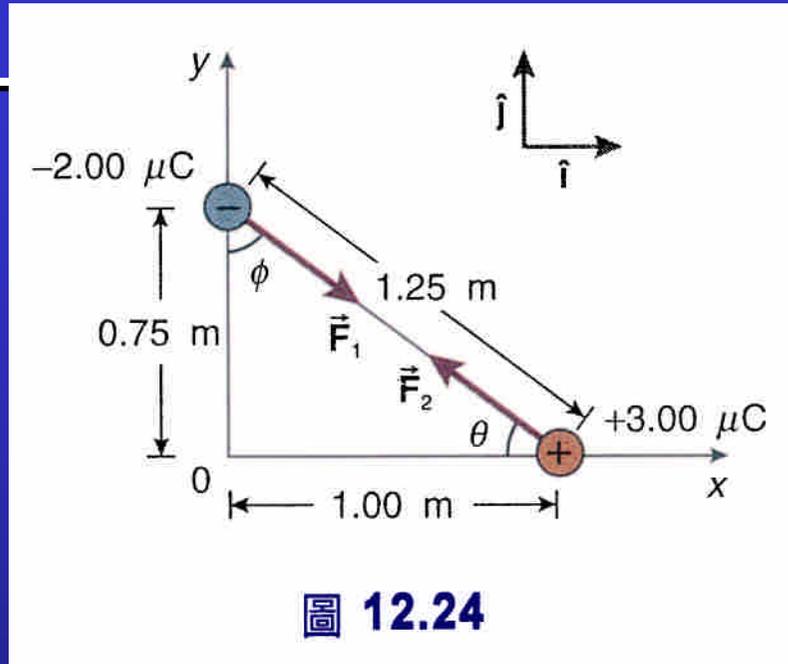


圖 12.24

→ 
$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= (F \sin \phi)\hat{i} - (F \cos \phi)\hat{j} \\ &= (3.46 \times 10^{-2} \text{ N})(0.800)\hat{i} \\ &\quad - (3.46 \times 10^{-2} \text{ N})(0.600)\hat{j} \\ &= (2.77 \times 10^{-2} \text{ N})\hat{i} - (2.08 \times 10^{-2} \text{ N})\hat{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_2 &= (-F \cos \theta)\hat{i} + (F \sin \theta)\hat{j} \\ &= (-3.46 \times 10^{-2} \text{ N})(0.800)\hat{i} \\ &\quad + (3.46 \times 10^{-2} \text{ N})(0.600)\hat{j} \\ &= (-2.77 \times 10^{-2} \text{ N})\hat{i} + (2.08 \times 10^{-2} \text{ N})\hat{j} \end{aligned}$$

b. 注意  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ ，所以此二力確為牛頓第三定律中之作用力一反作用力，它們大小相等且方向相反。

## 例題 12.3

三個點電荷位於三個固定位置如圖12.25所示。

- 計算位於原點之點電荷所受之淨力。
- 計算此電荷所受淨力大小。
- 此點電荷所受淨力與軸之夾角。

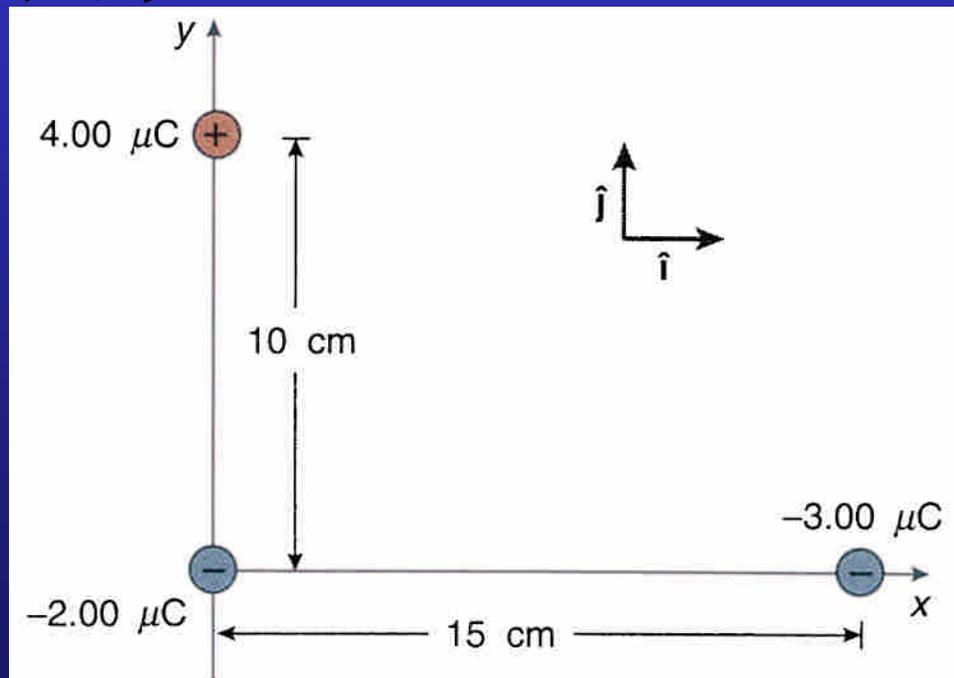


圖 12.25

解：

a.

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q||Q|}{r^2}$$

$$q = -2.00 \times 10^{-6} \text{ C} \quad Q = -3.00 \times 10^{-6} \text{ C}$$
$$F_1 = (9.00 \times 10^9) \times \frac{|-2.00 \times 10^{-6}| |-3.00 \times 10^{-6}|}{(0.15)^2}$$
$$= 2.4(\text{N})$$

$$\vec{F}_1 = (-2.4 \text{ N})\hat{i}$$

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q||Q'|}{r^2}$$

$$q = -2.00 \times 10^{-6} \text{ C} \quad Q' = -4.00 \times 10^{-6} \text{ C}$$
$$F_2 = (9.00 \times 10^9) \times \frac{|-2.00 \times 10^{-6}| |4.00 \times 10^{-6}|}{(0.10)^2}$$
$$= 7.2(\text{N})$$

$$\vec{F}_2 = (7.2 \text{ N})\hat{j}$$

$$\vec{F}_{\text{total}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$
$$= -2.4 \text{ N}\hat{i} + 7.2 \text{ N}\hat{j}$$

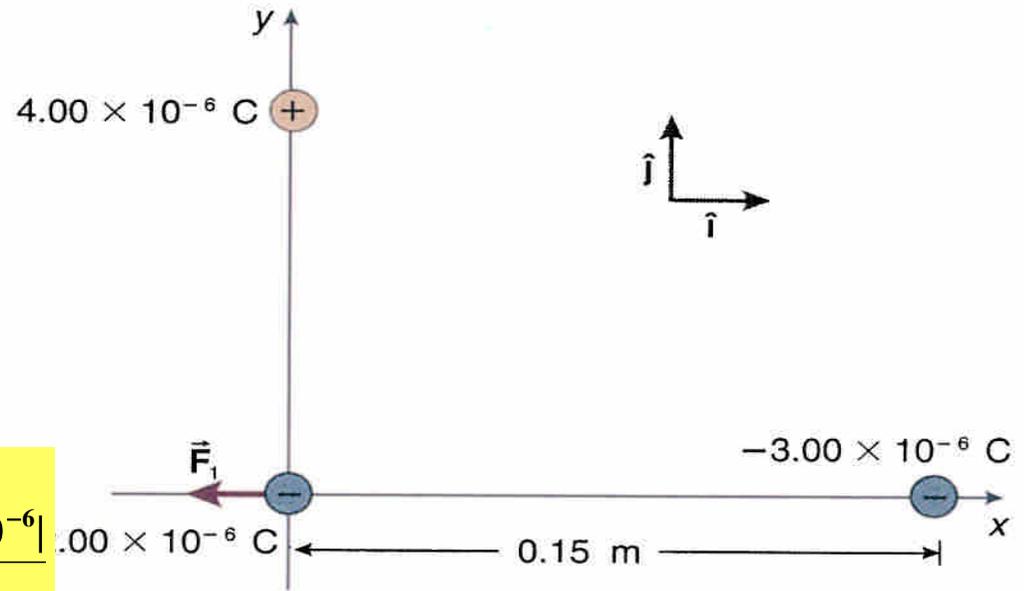


圖 12.26

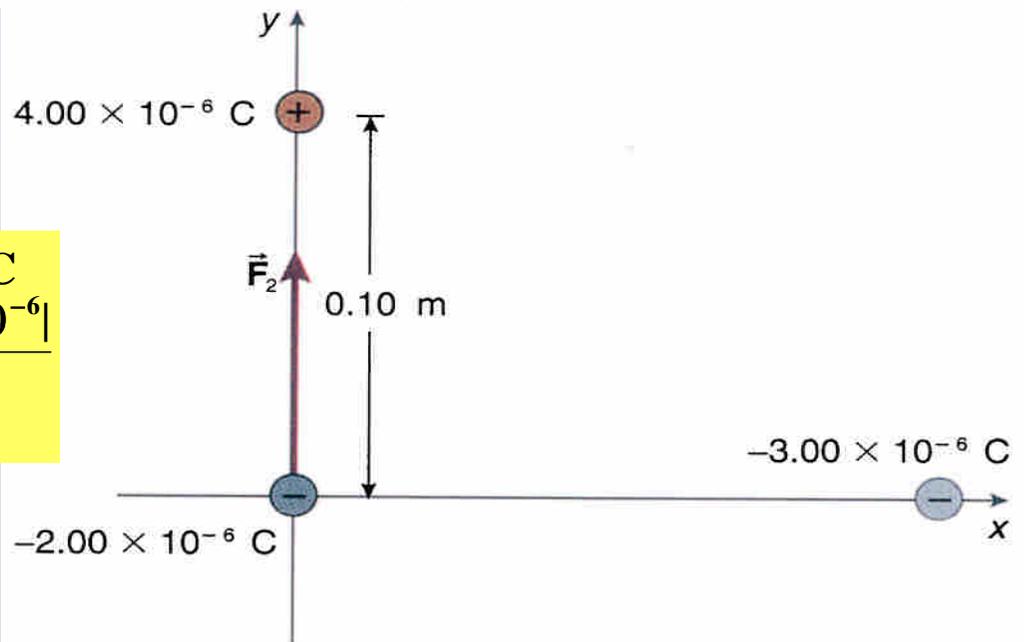


圖 12.27

解：

b. 淨力之大小為

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{total}} &= [(-2.4)^2 + (7.2)^2]^{1/2} \\ &= 7.6 \text{ (N)}\end{aligned}$$

c. 此淨力與  $-\hat{i}$  夾角  $\theta$  可以參考圖12.28，計算得

$$\tan \theta = \frac{|F_{y \text{ total}}|}{|F_{x \text{ total}}|} = \frac{7.2}{2.4} = 3.0$$



$$\theta = 72^\circ$$

或

$$\phi = 180^\circ - \theta$$



$$\phi = 108^\circ$$

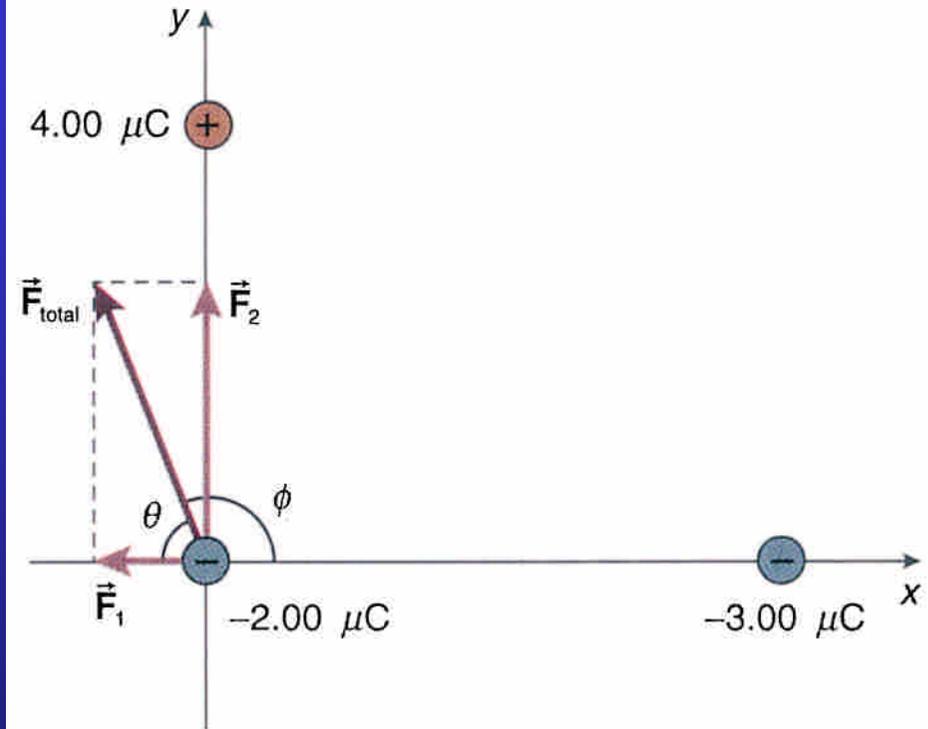


圖 12.28

## 12.4 電荷量子化

- 密立根 (Robert A. Millikan; 1868-1953) 利用顯微鏡觀察經過香水瓶摩擦過後的油滴。發現每個微小的油滴所帶的電量為一個基本電荷量的正整數倍或負整數倍。
- 我們現在稱此基本電荷量為電荷的基本單位 (fundamental unit of electric charge) 而以  $e^-$  來表示，而基本單位  $e$  則用來表示帶正電。至於電荷基本單位的大小在SI單位制中，大約為

$$e = 1.602177 \times 10^{-19} \text{ C}$$

此電荷基本量就是電子與質子所帶電荷量的大小。

# 電荷量子化

- 自然界的所有電荷為電荷基本單位的整數倍。我們稱電荷量子化 (quantized)，即是指只允許某些電荷量的存在。
- 換句話說，自然界任何一個獨立質點所帶電量

$$q = ne$$

其中  $n$  為一個正或負的整數，或稱為電荷量子數 (charge quantum number)。

- 電子帶電量  $q = -e$ ，而質子帶電量  $q = +e$ ；所以，電子與質子的電荷量子數分別是-1和+1。
- 若質點不帶電（如中子），則其電荷量子數  $n = 0$ ，又稱其為電中性 (electrical neutral)。

## 例題 12.4

---

帶電量為  $+1.00 \mu\text{C}$  之質點其電荷量子數  
為何？

解：

既然電荷是量子化的，由 (12.6) 式

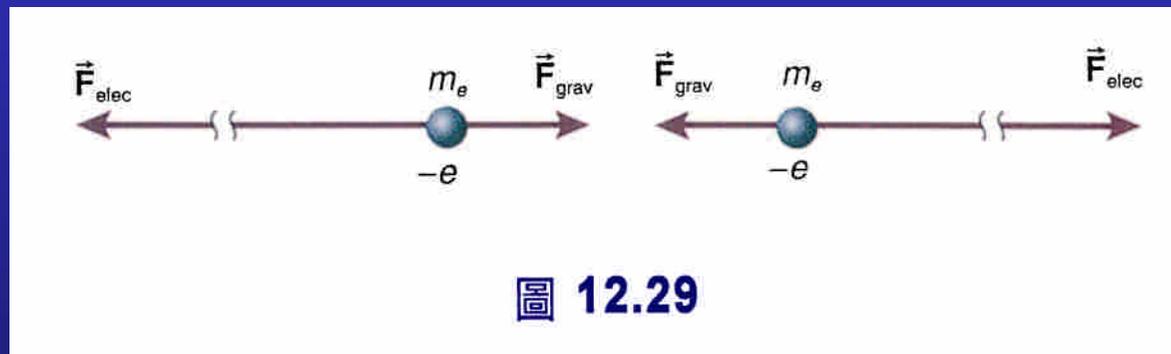
$$q = ne$$

可計算得電荷量子數為


$$\begin{aligned} n &= \frac{q}{e} = \frac{1.00 \times 10^{-6}}{1.602 \times 10^{-19}} \\ &= 6.24 \times 10^{12} \end{aligned}$$

# 例題 12.5

比較兩個電子相距  $r$  時，電子間的靜電力與萬有引力的大小？



解：

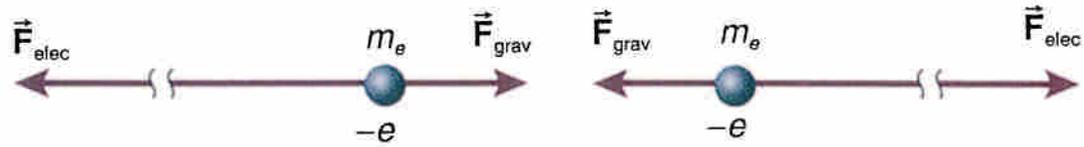


圖 12.29

由庫倫定律可  
計算得靜電力大小

$$F_{\text{grav}} = G \frac{m_e m_e}{r^2}$$

兩個電子間萬有引力的  
大小為

$$F_{\text{elec}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|-e| |-e|}{r^2}$$

二力大小的比為

$$\frac{F_{\text{elec}}}{F_{\text{grav}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{Gm_e^2} = 4.17 \times 10^{42}$$

這是一個非常大的數值，靜電力幾乎是萬有引力的  $10^{42}$  倍。萬有引力相對靜電力來說是非常的小。靜電力是它們間的主要作用力。

## 例題 12.6

波爾原子模型 (Bohr model)，氫原子的電子繞質子做圓周軌道運動。對氫原子言，是比較特別，因它的原子核只有一個質子。實際上，電子與原子核都是繞著電子與原子核的質心做圓周軌道運動。然而，質子與中子的質量都是電子質量的1836倍，而原子核又包含了質子與中子，所以系統的質心幾乎是落在原子核上。因此，我們說電子繞原子核做圓周軌道運動。氫原子中電子軌道半徑為  $5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$ 。

- a. 試計算作用於電子之電力大小與方向。
- b. 計算電子在此軌道上之加速度，並與重力加速度 $g$ 做比較。

解：

a.

$$\begin{aligned} F_{\text{elec}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q||Q|}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(e \times e)}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{(9.00 \times 10^9)(1.602 \times 10^{-19})^2} \\ &= \frac{1}{(5.29 \times 10^{-11})^2} \\ &= 8.25 \times 10^{-8} \text{ (N)} \end{aligned}$$

b.

$$F_{\text{elec}} = m_e a$$



$$\begin{aligned} a &= \frac{F_{\text{elec}}}{m_e} = \frac{8.25 \times 10^{-8}}{9.11 \times 10^{-31}} \\ &= 9.06 \times 10^{22} \text{ (m/s}^2\text{)} \end{aligned}$$



$$\frac{a}{g} = \frac{9.06 \times 10^{22}}{9.81} = 9.24 \times 10^{21}$$

## 12.5 靜電荷之電場

- 空間中某一點之  $\vec{E}$  電場是一個向量，其定義為

$$\vec{F}_{\text{elec on } q} \equiv q_{\text{test}} \vec{E}$$

$\vec{F}_{\text{elec on } q}$  為作用於電荷  $q_{\text{test}}$  之靜電力。

- 空間中一點之電場為該點處每一庫侖的電荷所受的電力。因此，在SI單位制中， $\vec{E}$  的單位為N/C。
- 電荷 $q$ 在電場中不需是被固定或靜止的，而是有可能因受力而被加速。
- 電場與產生電場之靜電荷的分佈有關。

# 靜電荷之電場

- 在電場中，電荷所受的電力方向與電場的關係，取決於電荷的正、負。如果電荷是正，作用於電荷的電力就平行於電場  $\vec{E}$ ；如圖12.30。相對的，
- 如果電荷負，作用於電荷的電力則與反平行，如圖12.31所示。

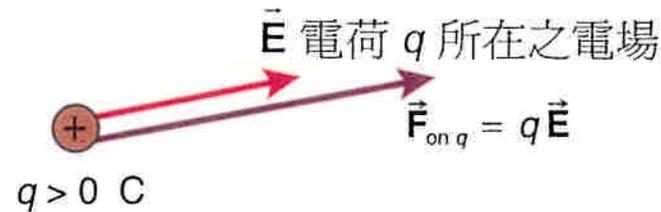


圖 12.30 一個正電荷置於電場中所受到的電力與電場方向平行

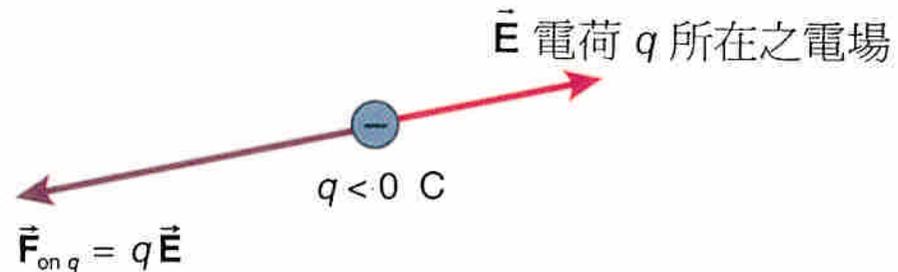
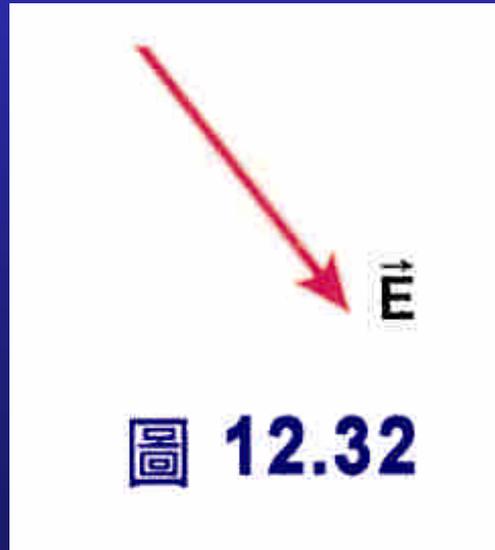


圖 12.31 一個負電荷置於電場中所受到的電力與電場方向反平行

## 例題 12.7

- a. 一個質子置於  $125 \text{ N/C}$  之均勻電場，其方向如圖 12.32。試計算作用於質子的電力。
- b. 如果將一電子置於上述之均勻電場，則電子所受之電力為何？



解：

選取一直角坐標系，如圖12.33，則電場以向量表示為

$$\vec{\mathbf{E}} = (-125 \text{ N/C})\hat{\mathbf{j}}$$

a. 作用於質子之作用力可以由 (12.8) 式

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}}$$

其中，  $q = +1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$



$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}} &= (+1.602 \times 10^{-19})(-125 \hat{\mathbf{j}}) \\ &= -2.00 \times 10^{-17} (\text{N})\hat{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

作用於質子之作用力與電場同方向，參考圖12.34。

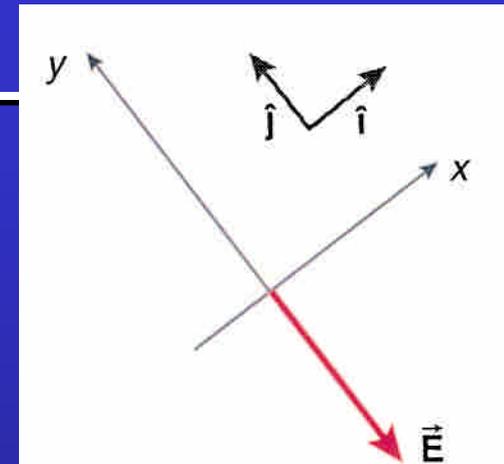


圖 12.33

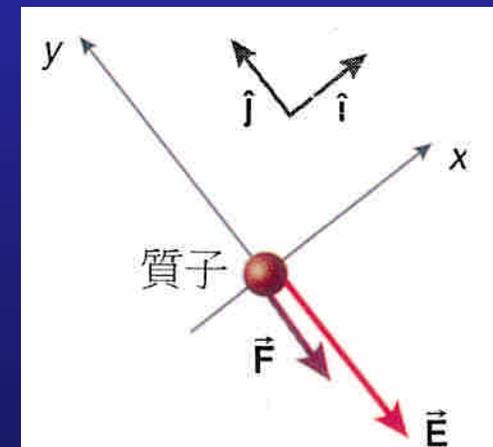


圖 12.34

解：

$$\vec{E} = (-125 \text{ N/C})\hat{j}$$

b. 作用於電子之作用力也可以由 (12.8) 式

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

但是， $q = -1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ ， $\vec{E}$  並未改變，代入 (12.8) 式即得



$$\begin{aligned}\vec{F} &= (-1.602 \times 10^{-19})(-125)\hat{j} \\ &= 2.00 \times 10^{-17} \text{ (N)}\hat{j}\end{aligned}$$

$\vec{F}$  與  $\vec{E}$  反平行，參考圖12.35

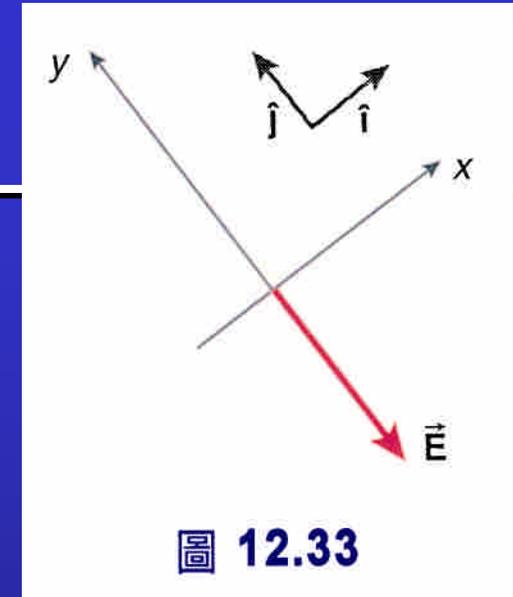


圖 12.33

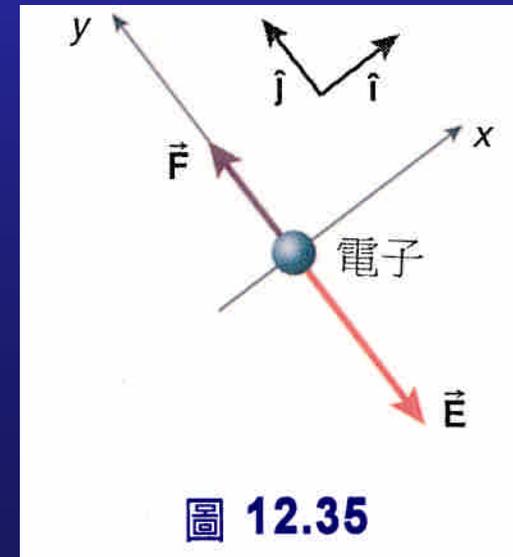


圖 12.35

## 12.6 點電荷分佈所建立的電場

- 質子與電子是最主要的點電荷，首先，我們假設 $Q$ 是正的，另一個正點電荷 $q$ 置於 $Q$ 所建立的電場中，如圖12.36。既然，與帶同性電，受到的排斥。

$$F_{\text{elec on } q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q||Q|}{r^2}$$

$$\vec{F}_{\text{elec on } q} = q\vec{E}_{\text{of } Q}$$

此力之大小為

$$F_{\text{elec on } q} = |q|E_{\text{of } Q}$$

$$E_{\text{of } Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|}{r^2}$$

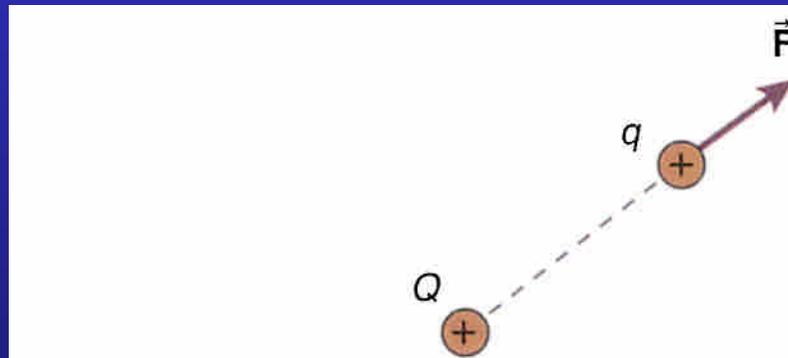


圖 12.36 正電荷  $q$  發現自己置於一個帶正電的電荷附近

值得注意的是——電場的大小與有關而與無關。

# 點電荷分佈所建立的電場

- 既然電荷是正的，作用於之電力必與電場平行，而作用於之力為排斥力，因此點電荷在電荷處的電場方向必為沿半徑指向外，如圖12.37。
- 因此，點電荷在 $r$ 處所建立之電場寫成向量形式

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

其中  $\hat{\mathbf{r}}$  為由電荷沿半徑指向外的單位向量。

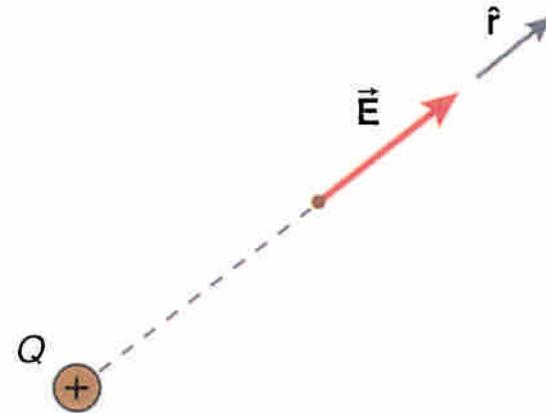


圖 12.37 一個正點電荷  $Q$  所建立的電場為沿著半徑指向遠離  $Q$  的方向

# 點電荷分佈所建立的電場

- 假如點電荷 $q$ 置於負電荷 $Q$ (亦即 $Q < 0$ )附近，則作用於 $q$ 之電力為吸引力，因 $q$ 與 $Q$ 帶異性電，參考圖12.38。在此情況下，作用於 $q$ 之電力仍可由式(12.8)： $\vec{F}_{\text{elec on } q} = q\vec{E}_{\text{of } Q}$  得到。既然為正，則作用於之電力與平行。此力為吸引力。
- 負電荷所建立的電場必指向 $\vec{E}$ ，如圖12.39。

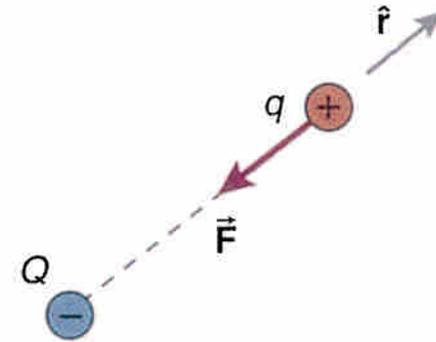


圖 12.38 正電荷  $q$  被負電荷  $Q$  吸引

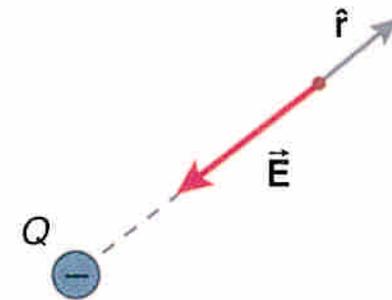
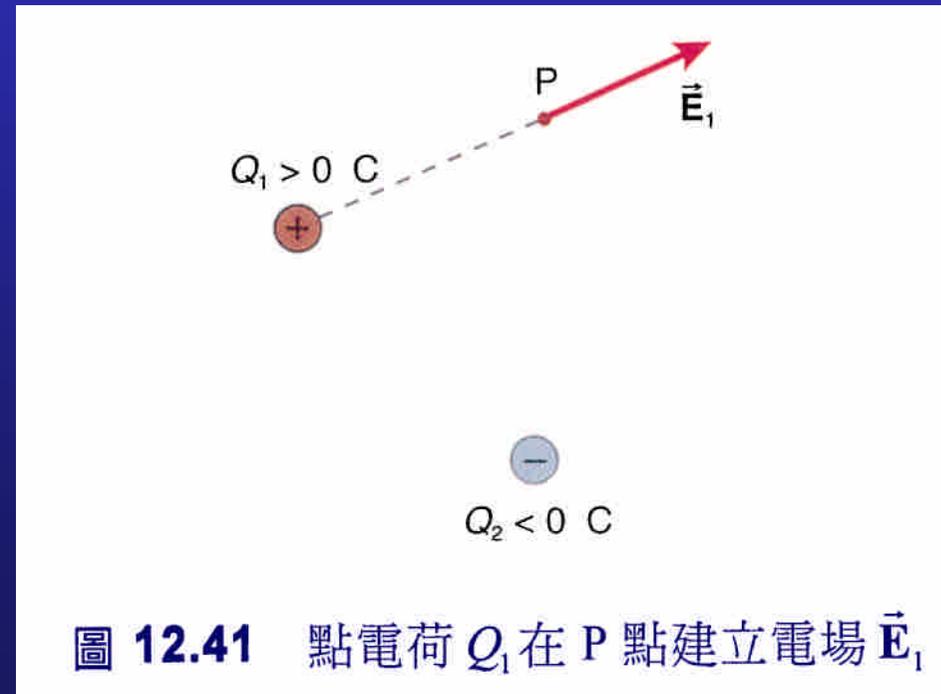
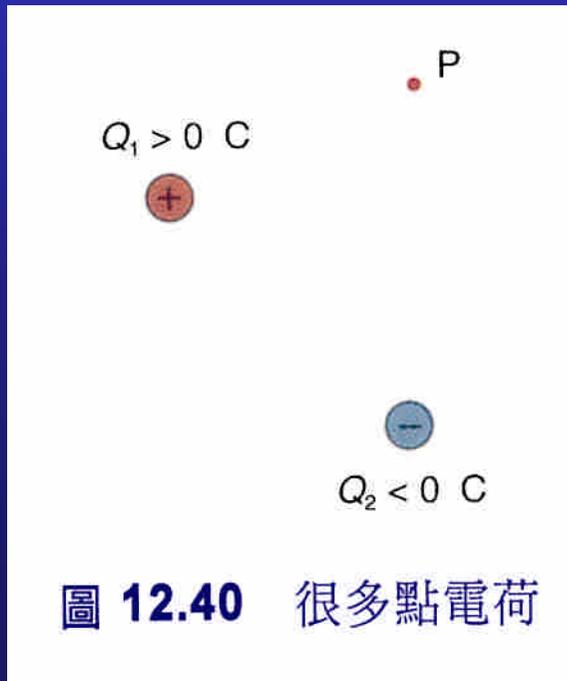


圖 12.39 點電荷  $Q$  所建立的電場指向  $Q$


$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|}{r^2} \hat{r}$$

# 點電荷群所建立的電場

- 假如有很多點電荷  $Q_1, Q_2, \dots$  分佈於空間中 (見圖12.40)，而我們要這些電荷在點P所建立的電場；我們可以用重疊原理 (principle of superposition)。
- 電荷  $Q_1$  單獨在P點產生的電場為  $\vec{E}_1$ ，如圖12.41。



- 點電荷  $Q_2$  在P點所建立之電場為  $\vec{E}_2$ ；見圖12.42。
- 當所有點電荷並存時，則它們在P點所建立之電場為每個點電荷單獨存在所建立之電場之向量和（見圖12.43）

：



$$\vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots$$



$$\vec{F}_{\text{on } q} = q\vec{E}_{\text{total}}$$

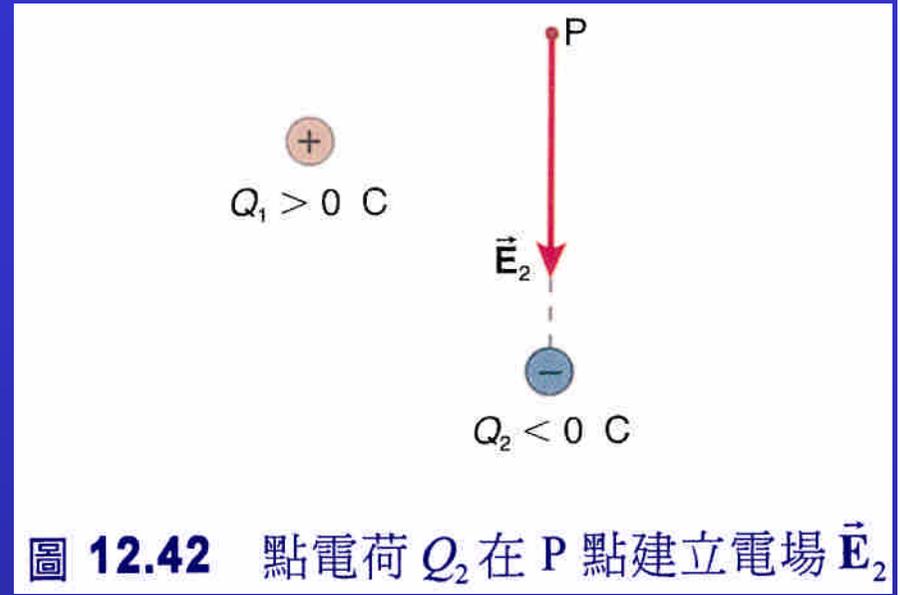


圖 12.42 點電荷  $Q_2$  在 P 點建立電場  $\vec{E}_2$

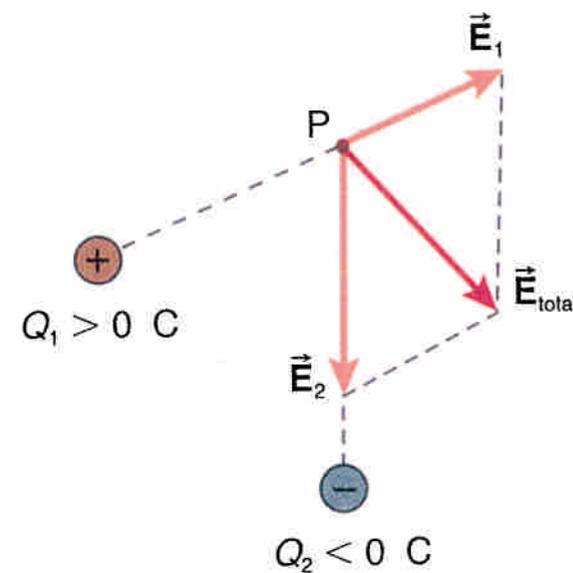


圖 12.43 P 點之電場為各點電荷所建立之電場的向量和

## 例題 12.8

- a. 計算在距質子  $5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$  處之電場，將電場以向量形式表示。
- b. 約略的以箭頭畫下在  $5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$  處的電場。
- c. 將電子置入與質子相距  $5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$  處，試計算電子之受力並畫出電子之受力方向。

解：



a. 質子為一點電荷，所以你可以用 (12.11) 式。電場的大小為

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|}{r^2}$$

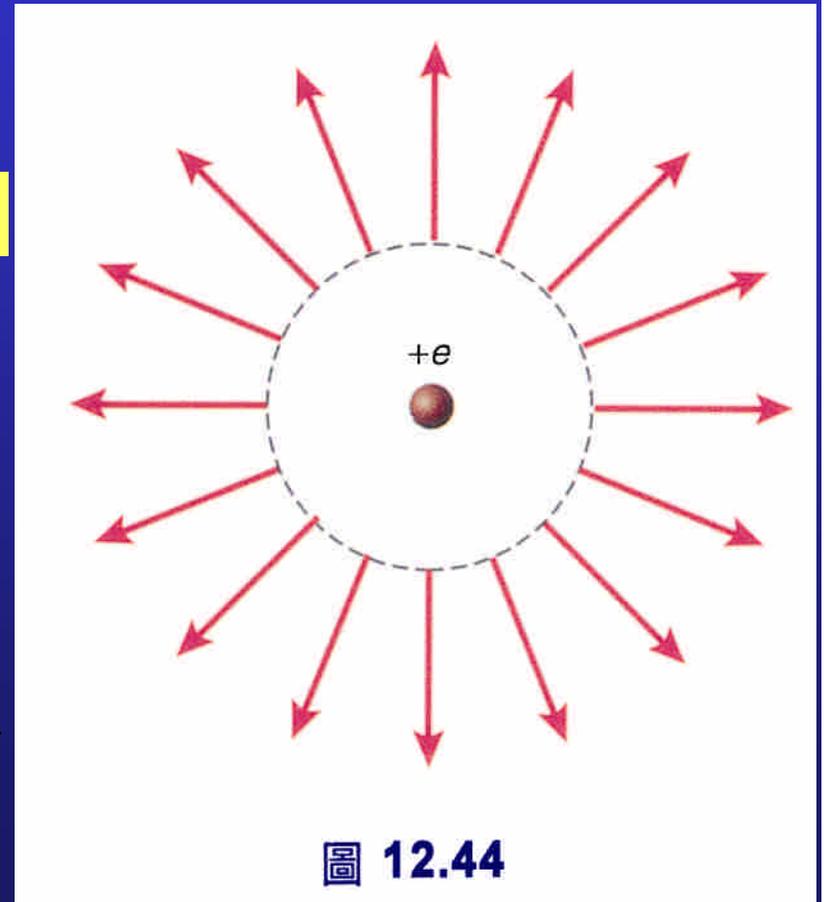
其中  $Q = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$   $r = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$   
代入上式，得

$$E = (9.00 \times 10^9) \frac{1.602 \times 10^{-19}}{(5.29 \times 10^{-11})^2}$$
$$= 5.15 \times 10^{11} \text{ (N/C)}$$

這是一個很強的電場！  
電場的方向為由質子沿半徑指向外，  
因質子為正電荷。

$$\vec{E} = (5.15 \times 10^{11} \text{ N/C}) \hat{r}$$

b. 電場以箭頭表示，如圖12.44。



解：

c. 電子在電場中之受力為



$$\begin{aligned}\vec{F} &= q\vec{E} \\ &= (-1.602 \times 10^{-19})(5.15 \times 10^{11} \hat{r}) \\ &= (-8.25 \times 10^{-8} \text{ N})\hat{r}\end{aligned}$$

作用於電子之作用力的方向為  $-\hat{r}$ ，與電場  $\vec{E}$  反平行。 $\vec{F}$  指向質子如圖12.45。

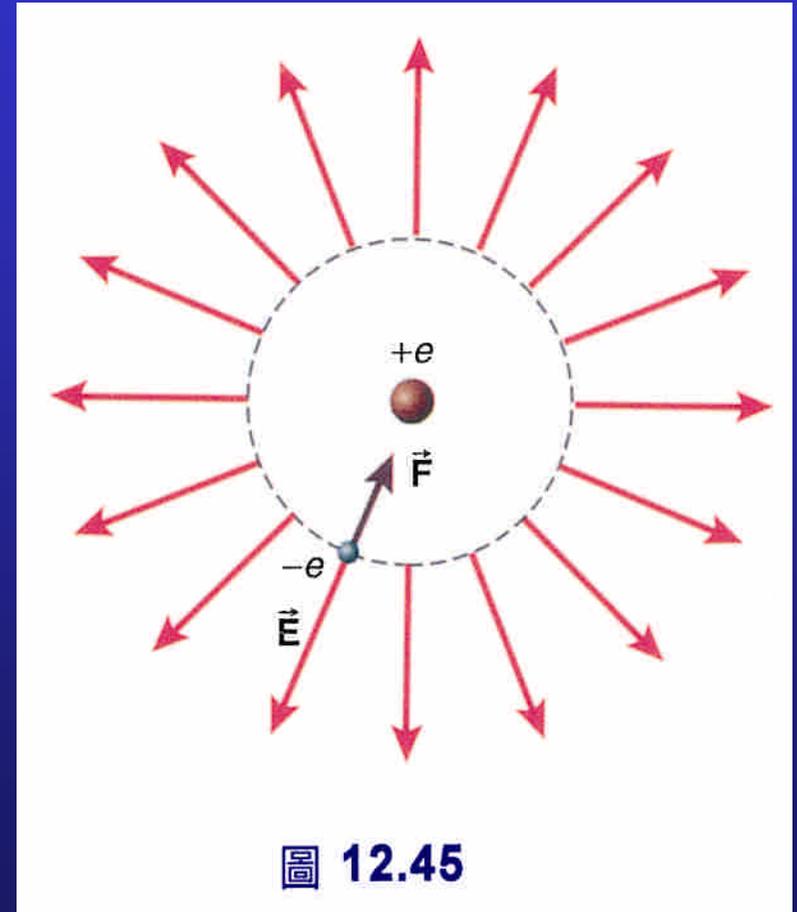


圖 12.45

## 例題 12.9

- a. 如圖12.46，試計算二點電荷在原點處所建立的電場，並計算電場的大小。
- b. 找出作用於置於原點之點電荷  $q = -3.00 \mu\text{C}$  之電力。此電力大小為何？

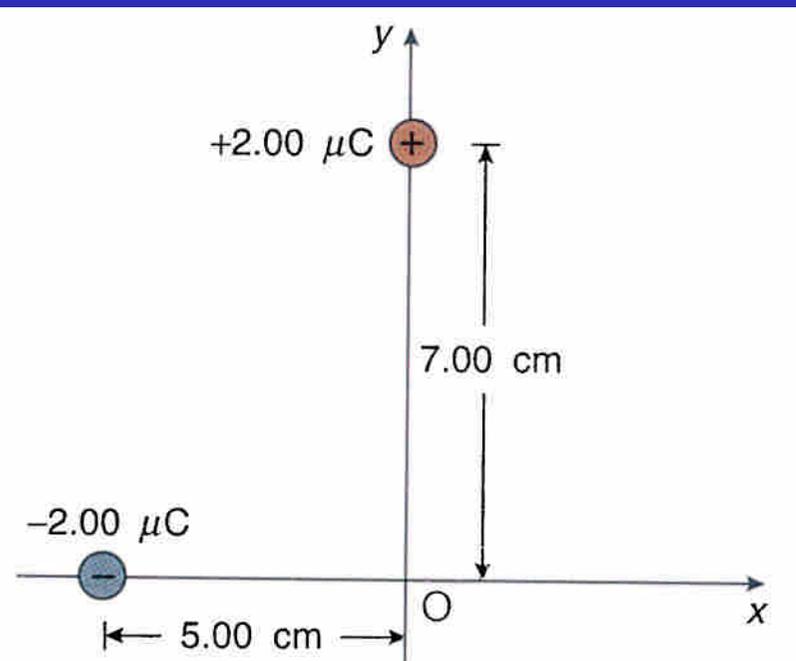


圖 12.46

解：

a. 1.  $-2.00 \mu\text{C}$  之電荷所建立之電場  $\vec{E}_1$

$$Q = -2.00 \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$r = 5.00 \text{ cm}$$

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|}{r^2}$$

$$E_1 = \frac{(9.00 \times 10^9) |-2.00 \times 10^{-6}|}{(5.00 \times 10^{-2})^2} \\ = 7.20 \times 10^6 \text{ (N/C)}$$

$$\vec{E}_1 = (-7.20 \times 10^6 \text{ N/C}) \hat{i}$$

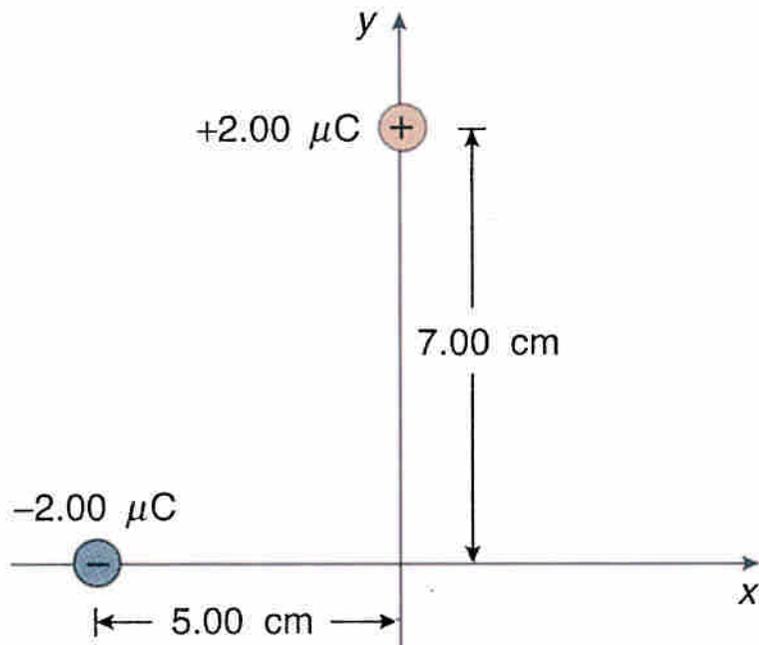


圖 12.47

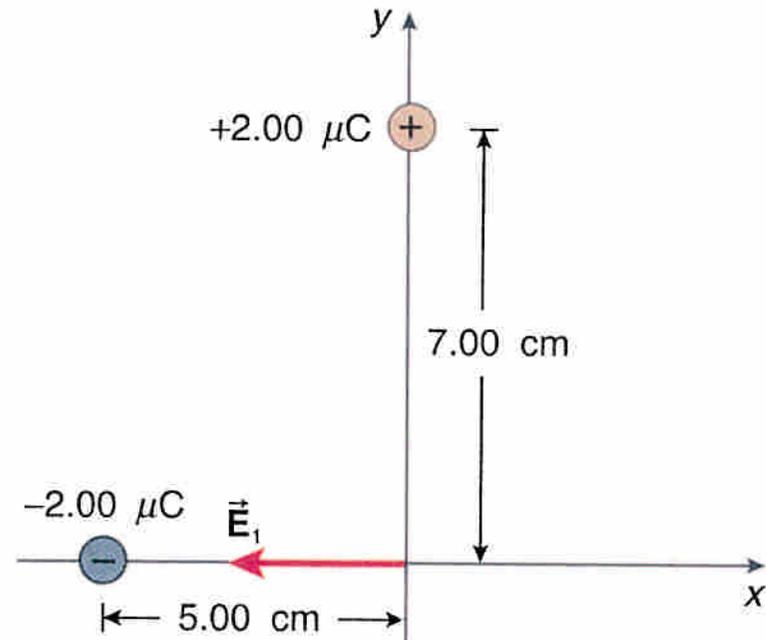


圖 12.48

a. 2.  $+2.00 \mu\text{C}$  之電荷所建立之電場  $\vec{E}_2$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|}{r^2}$$

$$r = 7.00 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$Q = +2.00 \times 10^{-6} \text{ C}$$



$$E_2 = \frac{(9.00 \times 10^9) | +2.00 \times 10^{-6} |}{(7.00 \times 10^{-2})^2}$$
$$= 3.67 \times 10^6 \text{ (N/C)}$$



$$\vec{E}_2 = (-3.67 \times 10^6 \text{ N/C}) \hat{j}$$

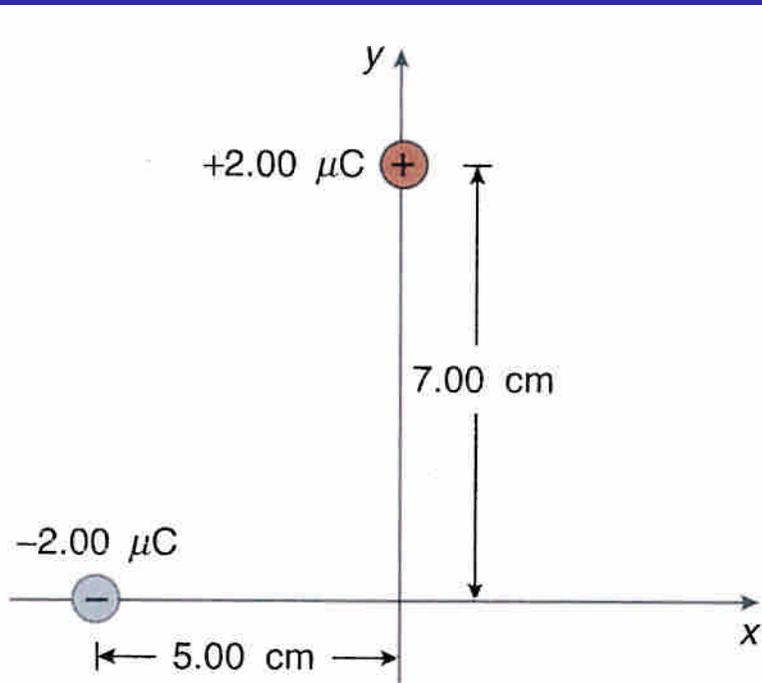


圖 12.49

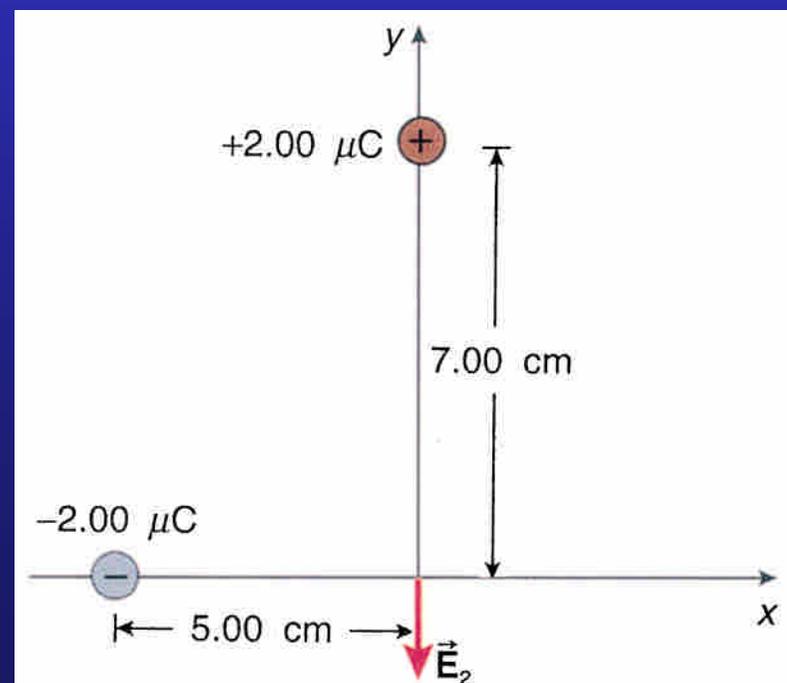


圖 12.50

在原點處，整個電場為與之向量和，如圖12.51。

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\text{total}} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \\ &= -7.20 \times 10^6 \text{ N/C} \hat{i} - 3.67 \times 10^6 \text{ N/C} \hat{j}\end{aligned}$$

電場大小為

$$\begin{aligned}E_{\text{total}} &= [(-7.20 \times 10^6)^2 + (-3.67 \times 10^6)^2]^{1/2} \\ &= 8.08 \times 10^6 \text{ (N/C)}\end{aligned}$$

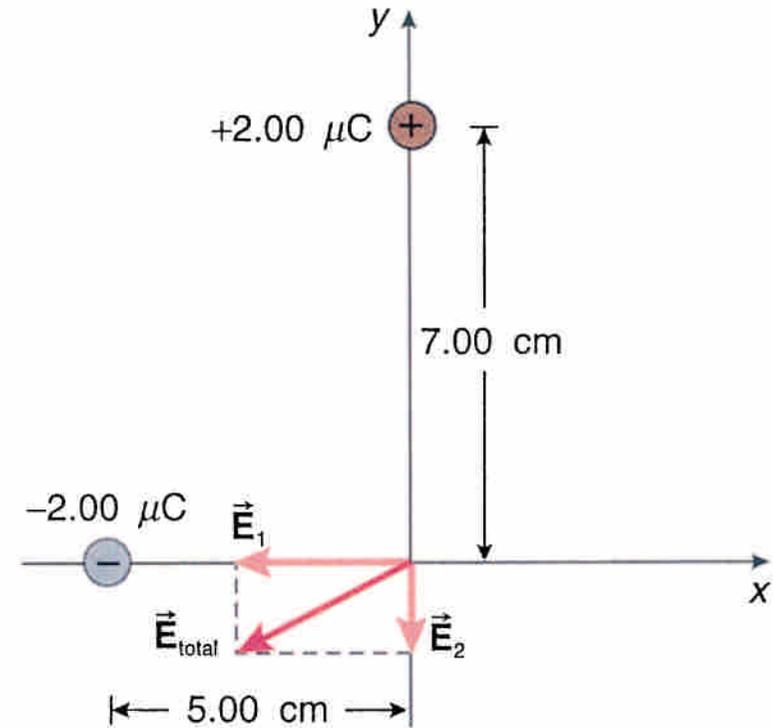


圖 12.51

b. 我們已知原點處之電場，則電荷置於原點之受力可以由 (12.8) 式得到

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q\vec{E} \\ &= (-3.00 \times 10^{-6})[(-7.20 \times 10^6)\hat{i} \\ &\quad - (3.67 \times 10^6)\hat{j}] \\ &= (21.6 \text{ N})\hat{i} + (11.0 \text{ N})\hat{j}\end{aligned}$$

此力如圖12.52所示。

$$F = [(21.6)^2 + (11.0)^2]^{1/2} = 24.2 \text{ (N)}$$

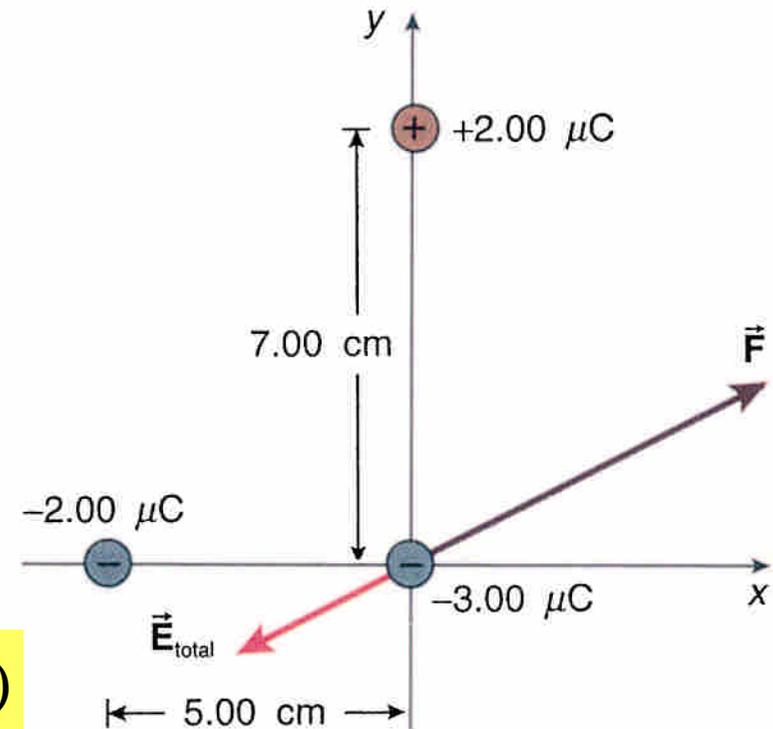


圖 12.52

# 12.7 電力線

➤ 在正與負點電荷周圍之電場我們由箭頭表示了其電場向量，如圖12.53與12.54。

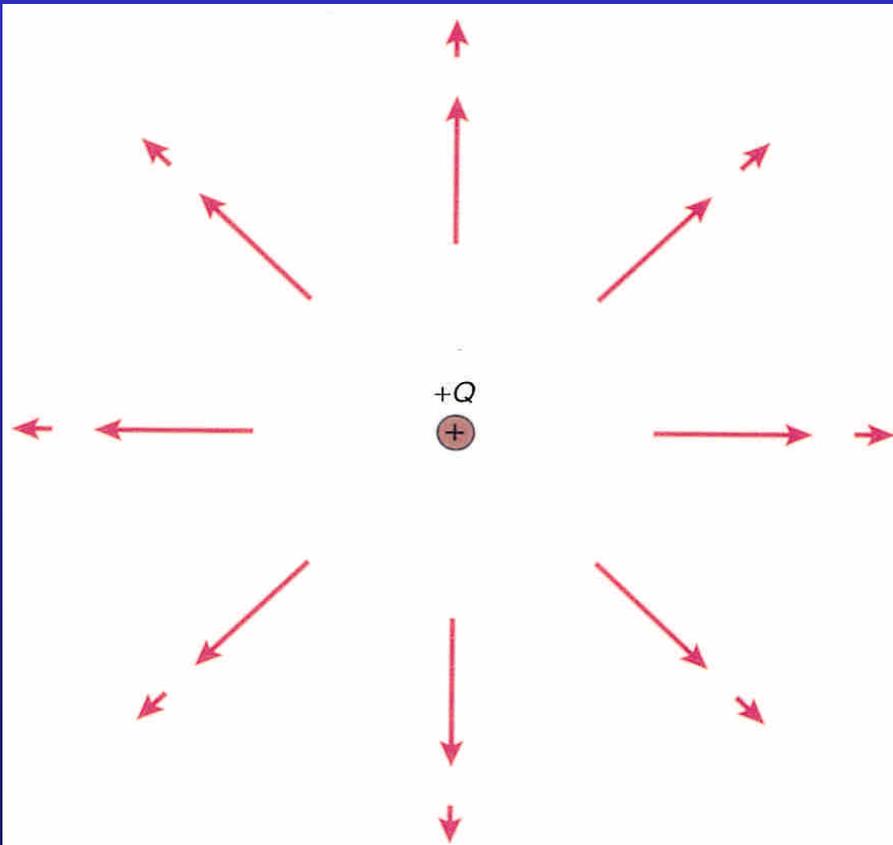


圖 12.53 正電荷在不同距離處所建立之電場的向量表示

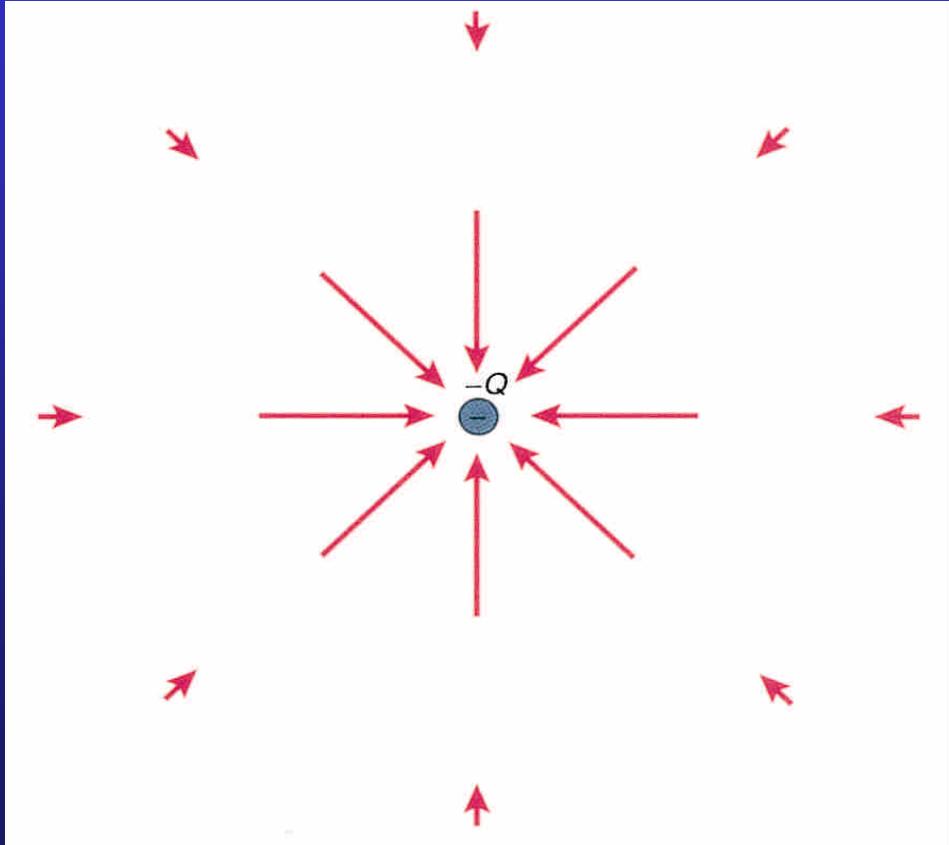


圖 12.54 負電荷在不同距離處所建立之電場的向量表示

# 電力線2

1. 電力線起於正電荷，止於負電荷。
2. 在靠近點電荷處，電力線為輻射對稱且它們的數目為電場大小的指標。

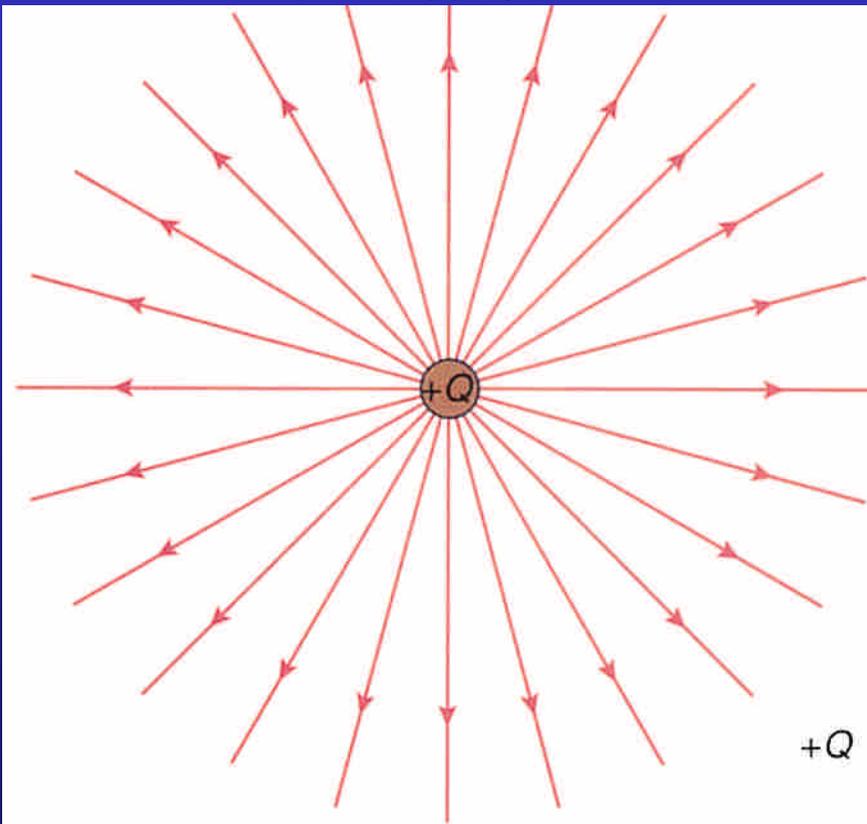


圖 12.55 一個正點電荷之電力線

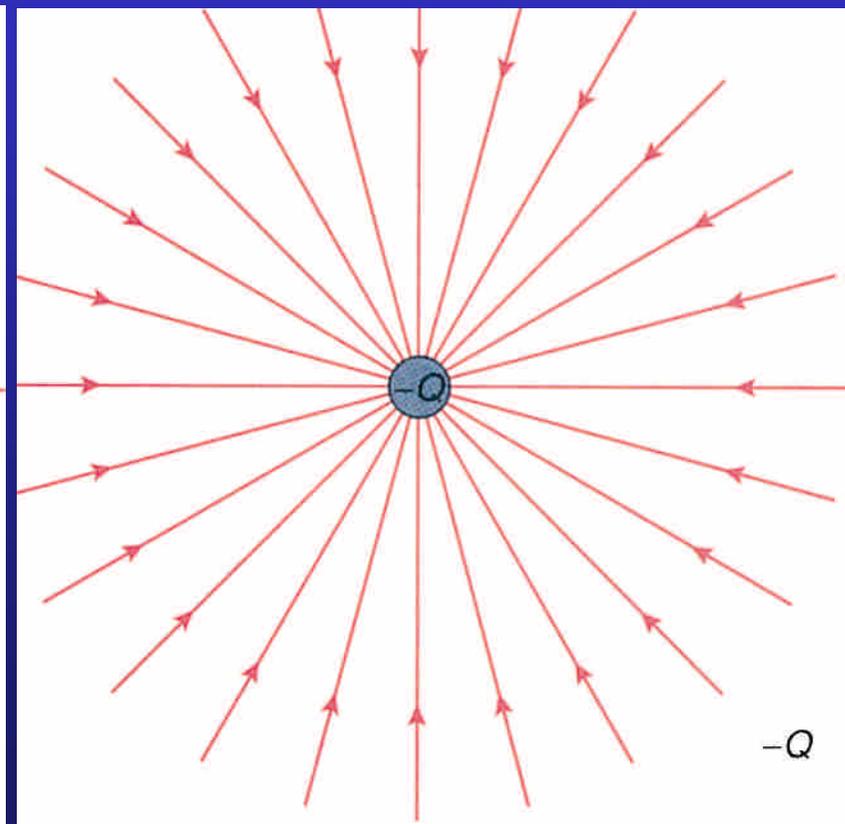


圖 12.56 一個負點電荷之電力線

# 電力線3

3. 在垂直電力線的單位面積之電力線數與該區的電場大小成正比。

4. 電力線絕不會相交

- 對一個正電荷與負電荷而言，若其電量相等，離開正電荷之電力線數與靠近負電荷之電力數相等，在很靠近點電荷處，電力線為輻射對稱；當離開點電荷稍遠處，我們可以發現電力線始於正電荷，而止於負電荷，如圖12.57所示。

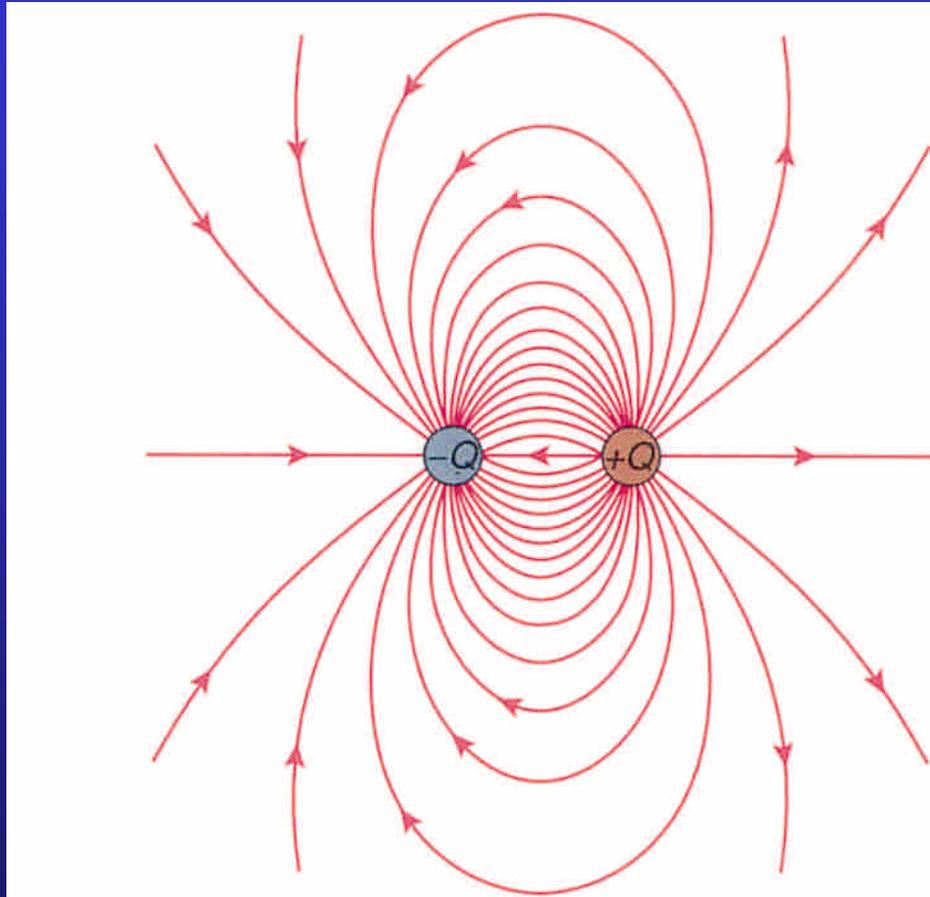


圖 12.57 帶電量相等之正、負電荷周圍之電力線。

# 電力線4

- 對兩個帶相等電量之正電荷而言，離開每個電荷的電力線數相等，且靠近電荷處的電力線都呈輻射對稱，見圖12.58。離點電荷較遠處，電力線與單一正電荷的電力線相似。電力線總數為單一電荷之電力線數的兩倍。

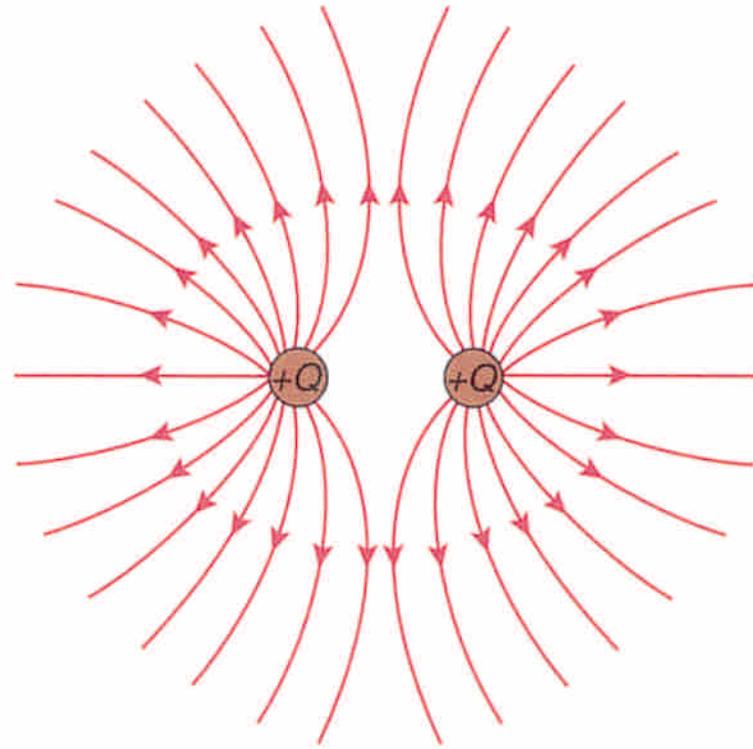


圖 12.58 帶電量相等之二正電荷周圍之電力線

# 電力線5

- 圖12.59為正電荷與負電荷之電力線。離開正電荷之電力線為進入負電荷之電力線的兩倍，此反應了電荷量大小的不同。源於正電荷之電力線有一半呈輻射狀而發散至極遠處。此顯示，在極遠處，此電荷分佈，可視為一個單獨點電荷，其電力線與單獨一個正電荷相似。

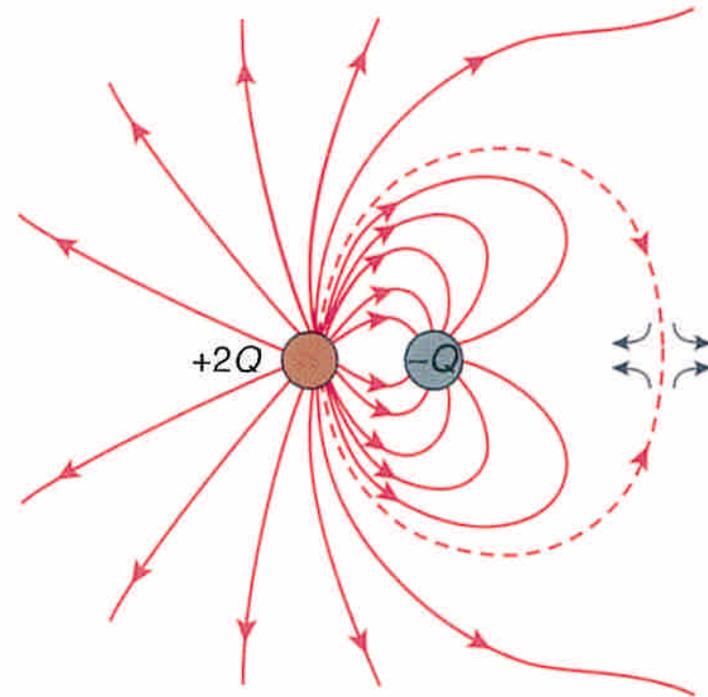


圖 12.59 二帶電量不相等之正、負二電荷周圍之電力線。

# 電力線6

- 兩個帶電量為  $+Q$ ，另兩個帶電量為  $-Q$  之四點電荷分別被置於正方形的四個角落，如圖12.60，其電力線亦描繪於圖中。

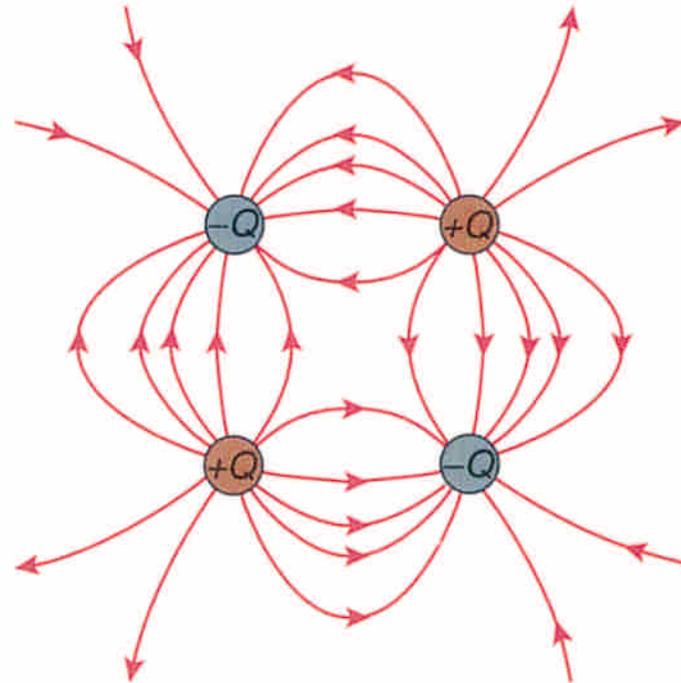
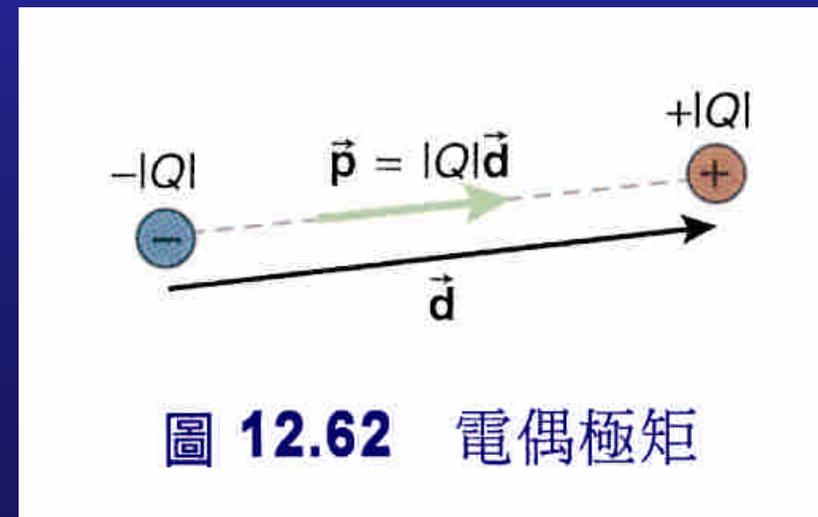
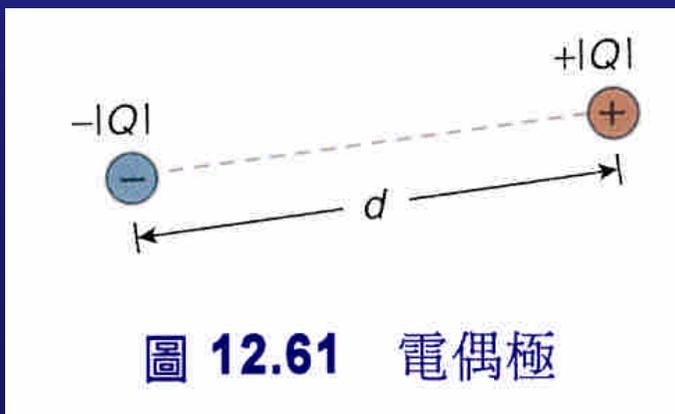


圖 12.60 帶電量相等之二個正電荷與二個負電荷周圍之電力線

# 12.8 一般分子的電荷分佈：電偶極

- 一個電偶極是由帶相等電量  $|Q|$ ，但相反電荷之兩點電荷相距  $d$  組成，如圖12.61。這個電偶極，整體說來，呈電中性。這意味在離電偶極很遠處（與電偶極的距離遠大於  $d$ ），電場為零。
- 電偶極矩 (electric dipole moment)  $\vec{p}$ 。將它定義為電荷  $|Q|$  與正電荷相對於負電荷之位置向量  $\vec{d}$  的乘積，如圖12.62：

$$\vec{p} = |Q| \vec{d}$$



# 水分子的電偶極

- 舉個例來看，如圖12.63即顯示如何將水分子視為一個電偶極。圖中所帶的電量 $e$ 基本電荷的分數倍並未違反電荷之量子化。此分數是因為電子圍繞氧原子的時間多於其圍繞氫原子的時間，如此一來造成電荷分佈的有效值為分數。水分子的電偶極的大小為

$$\begin{aligned} p_{\text{water}} &= 0.66ed \\ &= 0.66(1.602 \times 10^{-19})(0.057 \times 10^{-9}) \\ &= 6.0 \times 10^{-30} (\text{C} \cdot \text{m}) \end{aligned}$$

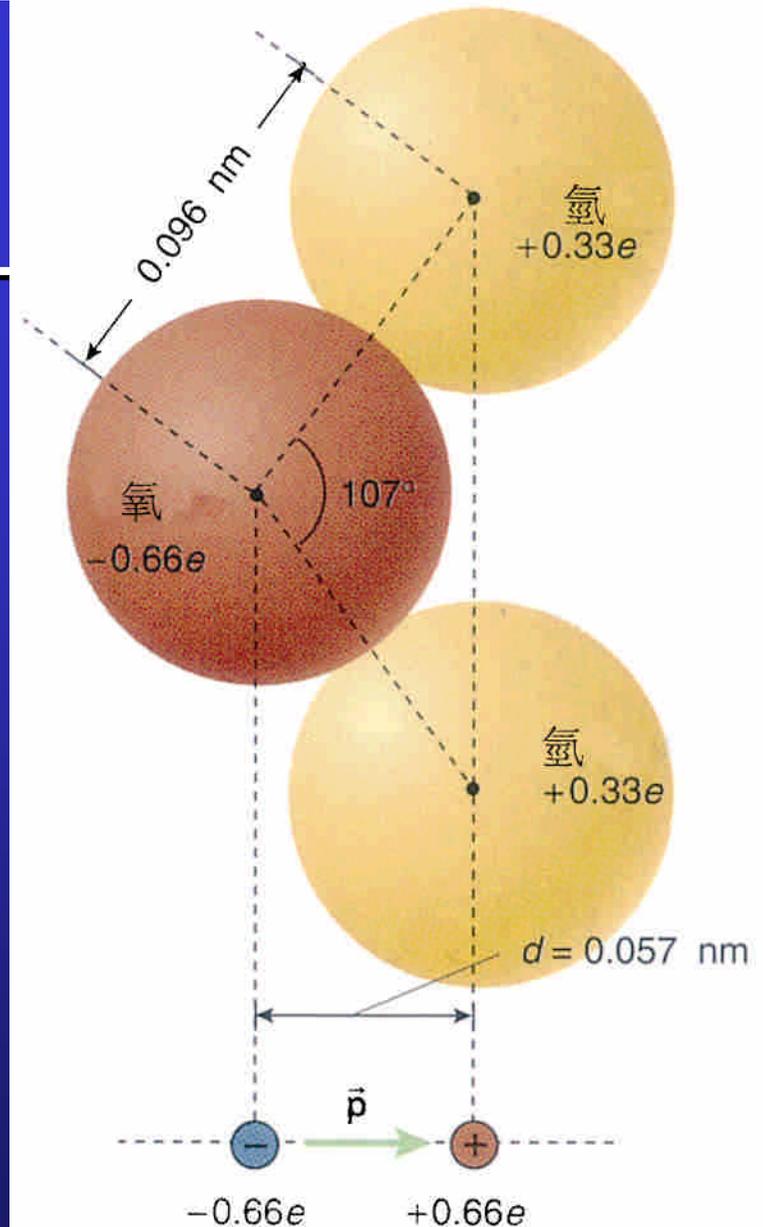


圖 12.63 水分子與其電偶極

# 分子的電偶極矩

➤ 一些常見的分子與分子鍵的電偶極矩列於表12.1中。

表 12.1 分子的電偶極矩

分子	$p$
Aceton ( $C_3H_6O$ )	$9.7 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$
Ammonia ( $NH_3$ )	$5 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$
Carbon dioxide ( $CO_2$ )	沒有
Carbon monoxide (CO)	$0.4 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$
Ethyl alcohol ( $C_2H_5OH$ )	$5.7 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$
Hydrochloric acid (HCl)	$3.6 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$
Oxygen ( $O_2$ )	沒有
Sulfur dioxide ( $SO_2$ )	$5.5 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$
Water ( $H_2O$ )	$6.0 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$
分子鍵	$p$
H—O	$5 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$
C—Cl	$5 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$
C—O	$2.5 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$
C=O	$7.7 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$
C—Cl	$4.9 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$
C—N	$0.73 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$
H—N	$3.0 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$

# 電偶極的電場

- 電場與電偶極矩成正比，與電偶極的距離之三次方成反比。
- 在沿電偶極軸線上一點的電場在例題12.10中將推導。
- 垂直於電偶極軸線上一點的電場在例題12.11中也會推導。

# 例題 12.10

計算在電偶極軸線上與電偶極中心相距之P點的電場，參考圖12.65。

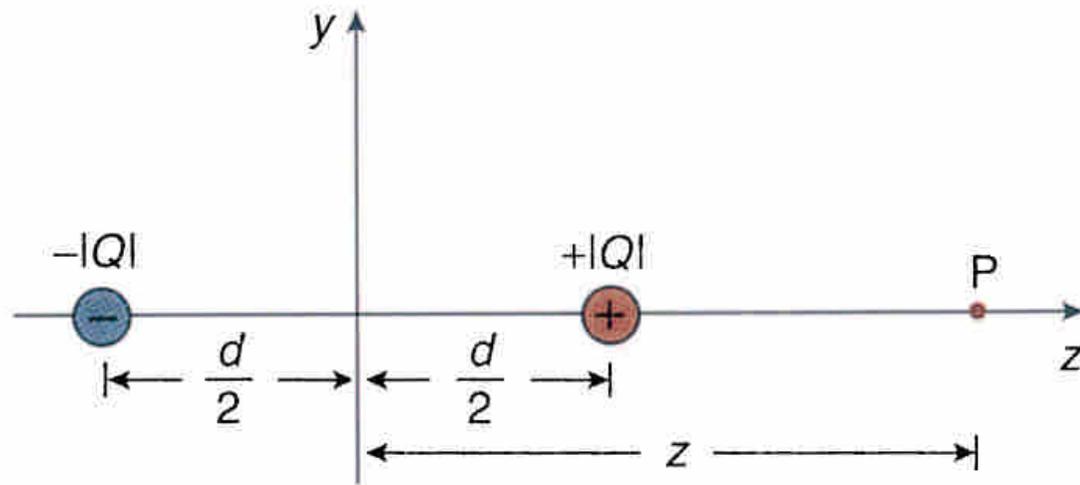


圖 12.65

# 解-1 :

$$\vec{\mathbf{E}}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|}{\left(z - \frac{d}{2}\right)^2} \hat{\mathbf{k}}$$

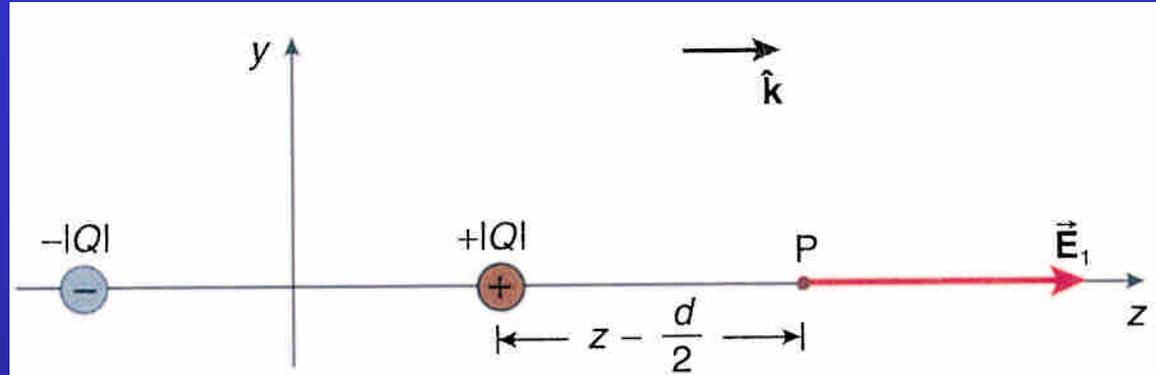
$$\vec{\mathbf{E}}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|}{\left[z + \frac{d}{2}\right]^2} (-\hat{\mathbf{k}})$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2$$

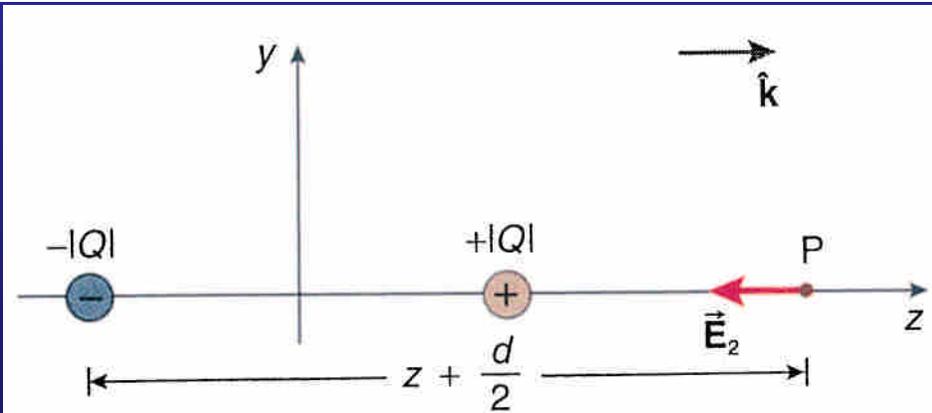
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{|Q|}{\left(z - \frac{d}{2}\right)^2} - \frac{|Q|}{\left(z + \frac{d}{2}\right)^2} \right] \hat{\mathbf{k}}$$



$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|}{z^2} \left[ \left(1 - \frac{d}{2z}\right)^{-2} + \left(1 + \frac{d}{2z}\right)^{-2} \right] \hat{\mathbf{k}}$$



12.66



12.67

## 解-2：

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|}{z^2} \left[ \left(1 - \frac{d}{2z}\right)^{-2} + \left(1 + \frac{d}{2z}\right)^{-2} \right] \hat{\mathbf{k}}$$

假如  $z \gg d$ ，可以用二項式展開以簡化上述之表示式。

$$(1 + \alpha)^n \approx 1 + n\alpha \quad \text{當 } \alpha \ll 1$$


$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|}{z^2} \left\{ \left[ 1 + (-2) \left( \frac{-d}{2z} \right) \right] - \left[ 1 + (-2) \left( \frac{d}{2z} \right) \right] \right\} \hat{\mathbf{k}} \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|}{z^2} \frac{2d}{z} \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

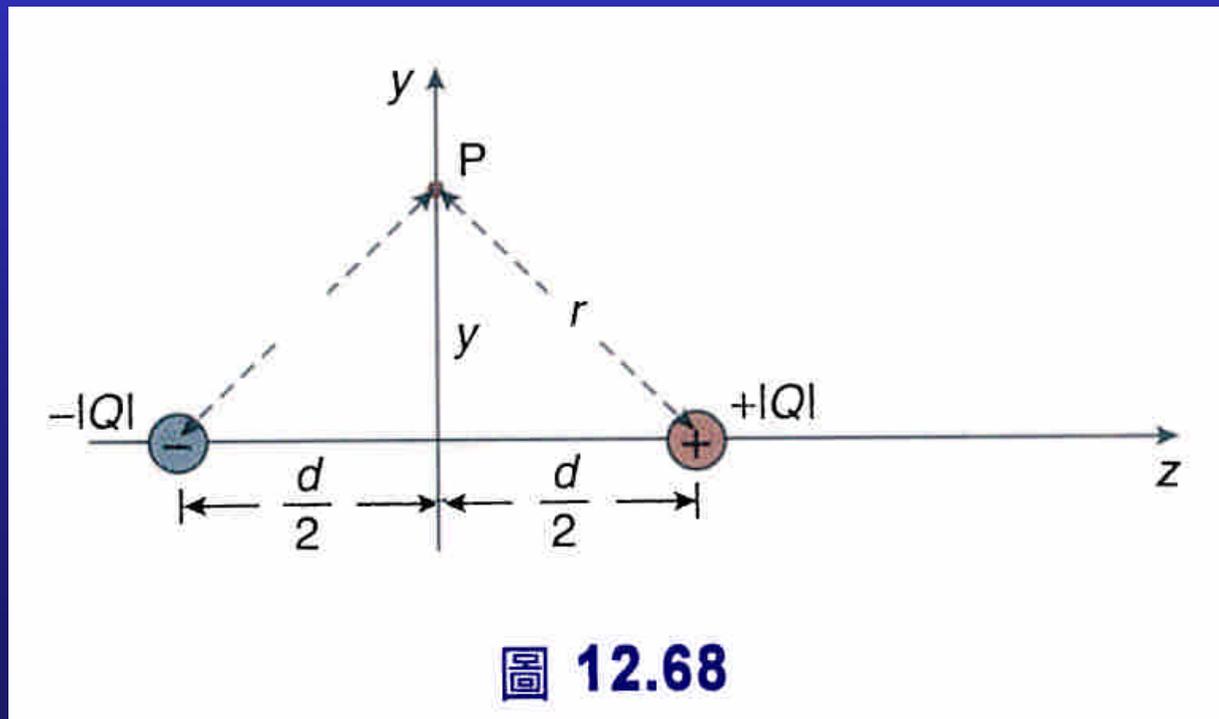
將上式，以電偶極矩表示，則可寫為


$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{z^3} \hat{\mathbf{k}}$$

當  $z \gg d$ ，電偶極之電場以距離的三次方遞減。

# 例題 12.11

計算電偶極中，位於點電荷連線的垂直平分線上之一點P的電場，參考圖12.68。



# 解-1：

$$r^2 = y^2 + \frac{d^2}{4}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|}{\left[ y^2 + \frac{d^2}{4} \right]}$$

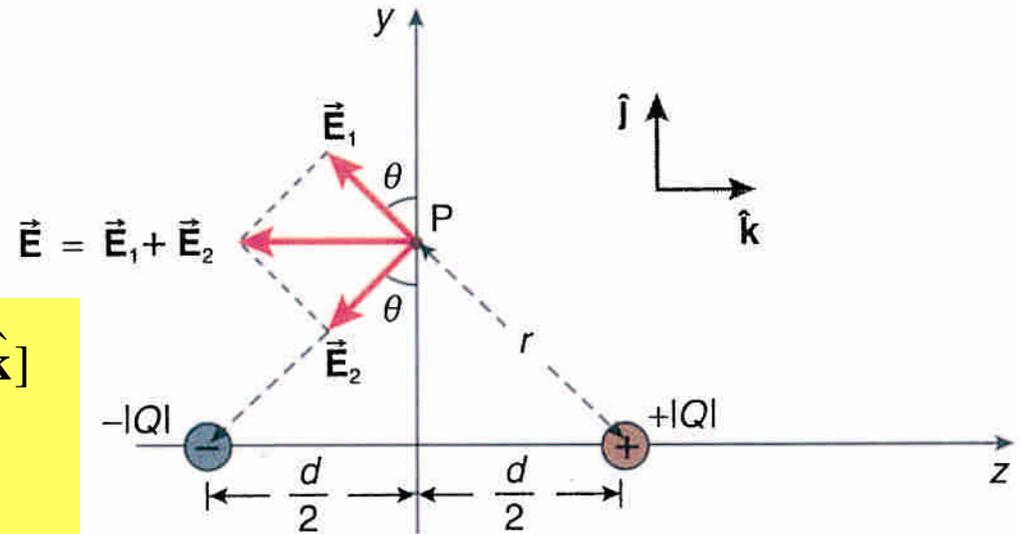
$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|}{\left[ y^2 + \frac{d^2}{4} \right]} [(\cos\theta)\hat{\mathbf{j}} - (\sin\theta)\hat{\mathbf{k}}]$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|}{\left[ y^2 + \frac{d^2}{4} \right]} [(-\cos\theta)\hat{\mathbf{j}} - (\sin\theta)\hat{\mathbf{k}}]$$



$$\vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$= \left[ \frac{-2}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|}{\left( y^2 + \frac{d^2}{4} \right)} \sin\theta \right] \hat{\mathbf{k}}$$



12.69

# 解-2：

$$\sin \theta = \frac{d/2}{\left(y^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{1/2}}$$

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{total}} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|d}{\left(y^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{3/2}} \hat{\mathbf{k}}$$



$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{total}} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{\left(y^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{3/2}} \hat{\mathbf{k}}$$

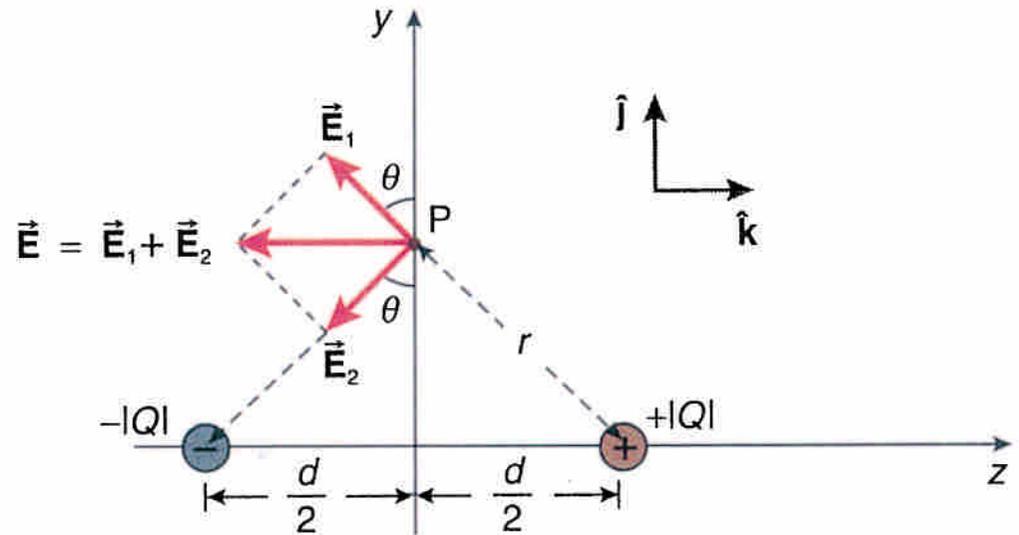


圖 12.69

當P點與電偶極相距甚遠（即  $y \gg d$ ）

$$y^2 \gg d^2 \rightarrow \vec{\mathbf{E}}_{\text{total}} \approx \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{y^3} \hat{\mathbf{k}} \quad (y \gg d)$$

當  $z \gg d$ ，電偶極之電場以距離的三次方遞減。

# 電偶極置於一均勻電場中

- 假如一個電偶極置於一均勻電場中，作用於電偶極之淨力為零；見圖12.64。作用於電偶極之每一個電荷之電力大小相等，但是方向相反，因此向量和為零。
- 作用於電偶極之力矩和與電偶極矩相對於電場的方向有關。
- 在例題12.13證明了作用於電偶極之總力矩  $\vec{\tau}$  與均勻電場  $\vec{E}$  的關係為

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

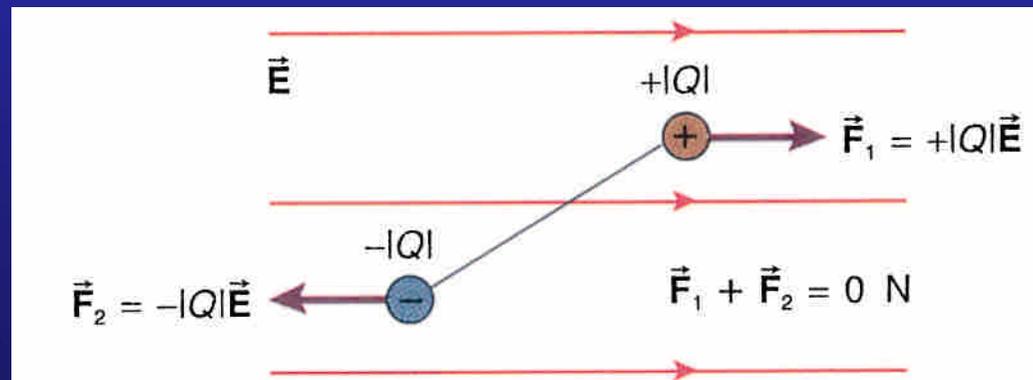


圖 12.64 在均勻電場中，電偶極所受之電力和為零。

# 例題 12.12

試證一電偶極置於一均勻電場  $\vec{E}$  中，相對於電偶極中心點所受到的力矩  $\vec{\tau}$  為

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

其中  $\vec{p}$  為電偶極矩，見圖12.70。

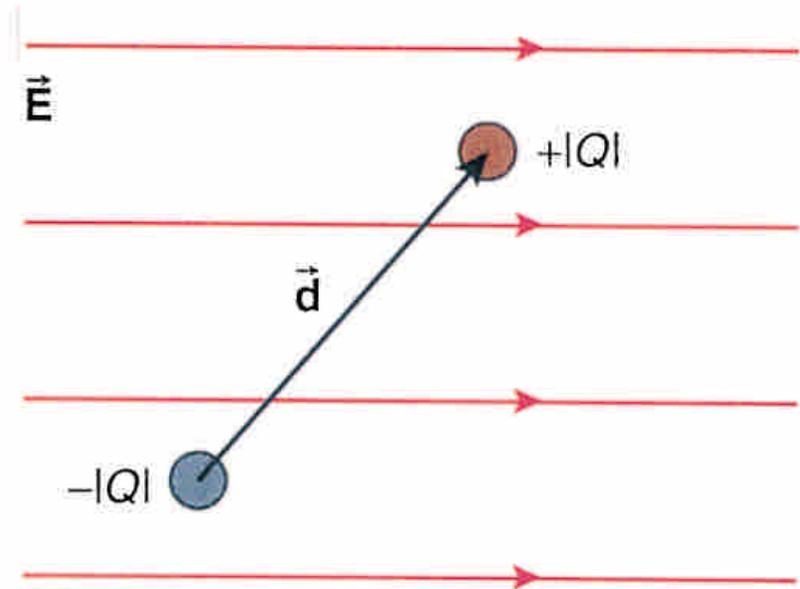


圖 12.70

# 解-1：

電偶極上之二電荷所受到之電力為：

作用於正電荷之電力  $\vec{F}_1 = +|Q|\vec{E}$ ；

作用於負電荷之電力  $\vec{F}_2 = -|Q|\vec{E}$ 。

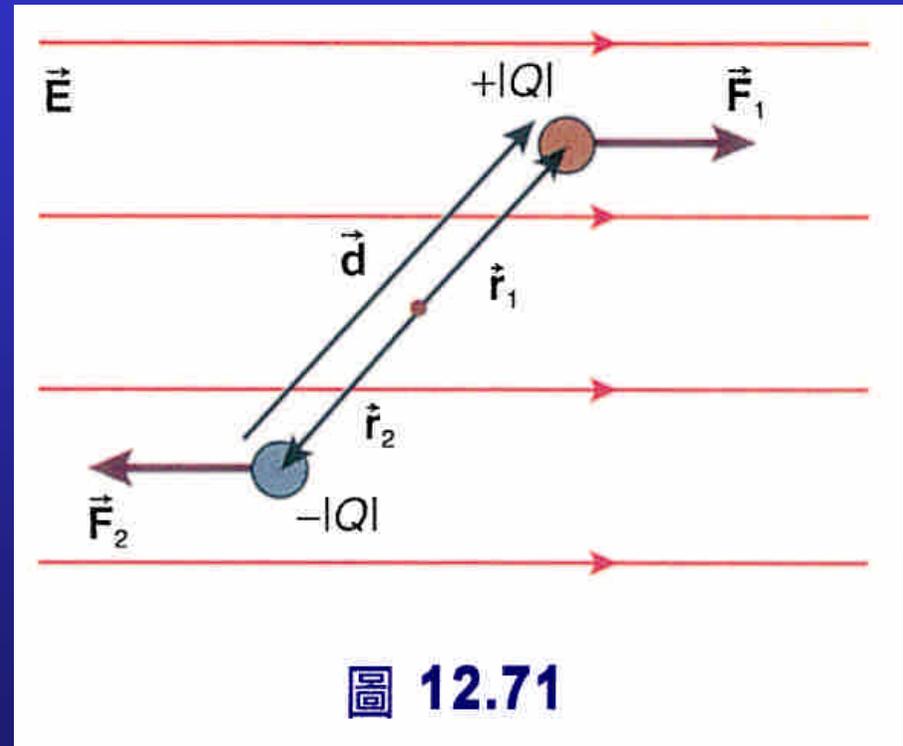
$$\vec{r}_1 = \frac{\vec{d}}{2}$$

$$\vec{r}_2 = -\frac{\vec{d}}{2}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

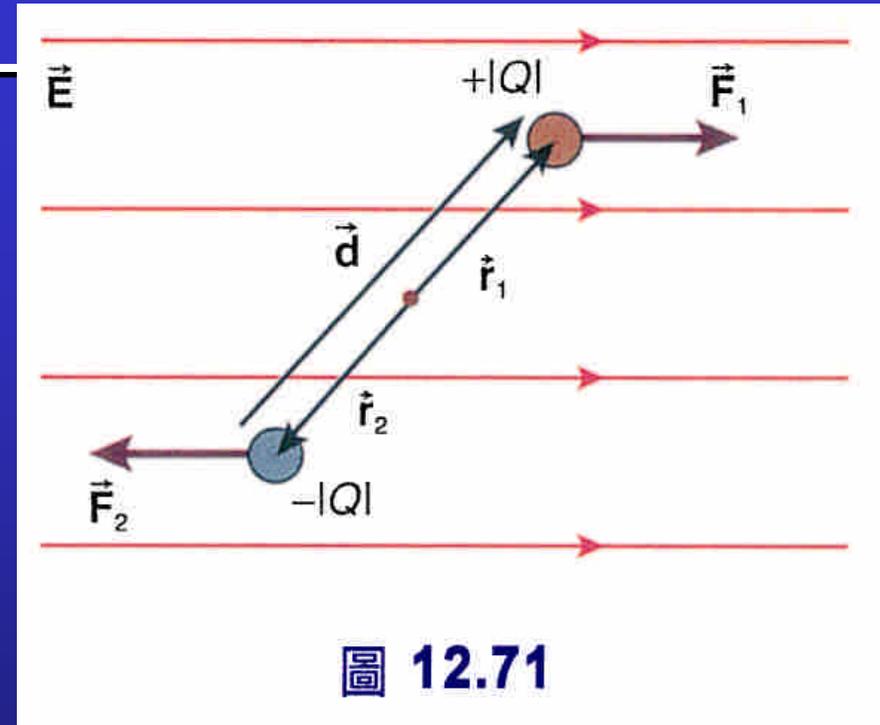
$$\vec{\tau}_1 = \frac{\vec{d}}{2} \times \vec{F}_1 = \frac{\vec{d}}{2} \times |Q|\vec{E}$$

$$\vec{\tau}_2 = \frac{-\vec{d}}{2} \times (-|Q|\vec{E}) = \frac{\vec{d}}{2} \times |Q|\vec{E}$$



# 解-2：

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 \\ &= \frac{\vec{d}}{2} \times |Q| \vec{E} + \frac{\vec{d}}{2} \times |Q| \vec{E} \\ &= |Q| \vec{d} \times \vec{E}\end{aligned}$$



又  $|Q| \vec{d}$  為電偶極矩  $\vec{p}$ ，所以

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

## 12.9 連續電荷分佈所建立的電場

- 對於電荷分佈不再是點電荷時，我們必須運用**重疊原理**去決定其所建立的電場。也就是把電荷想像成由無數點電荷  $dq$  組成的連續海，每個點電荷在空間的一特定點  $P$  所建立的電場  $d\vec{E}$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

- 其中  $\hat{r}$  為由微小電荷  $dq$  指向點  $P$  的單位向量。

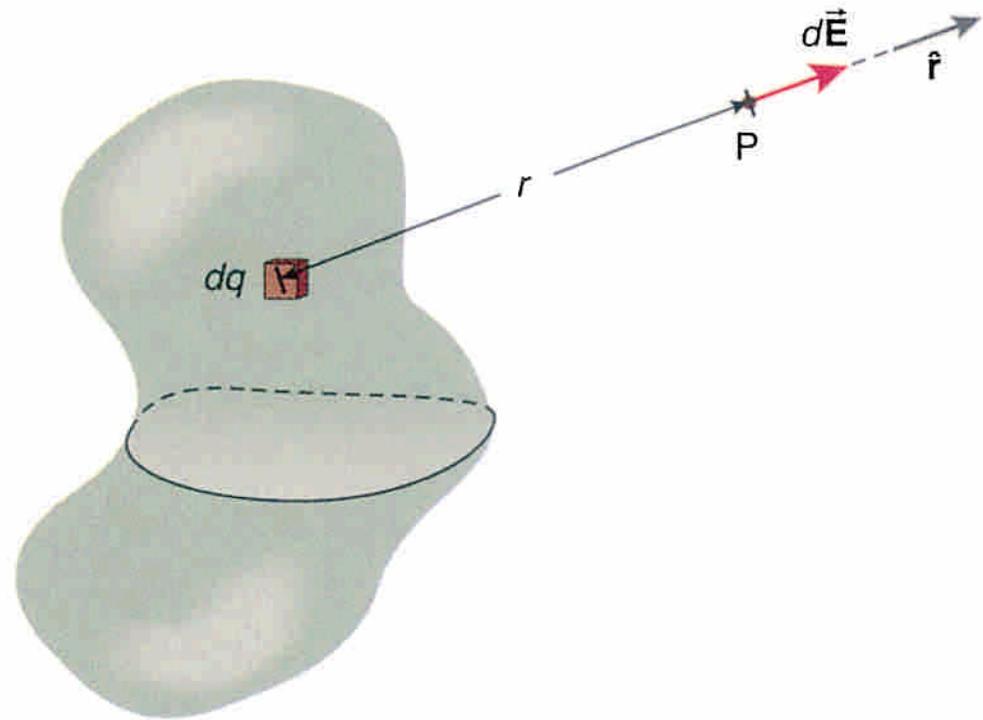


圖 12.72 每一微小電荷  $dq (dq > 0)$  在  $P$  點產生之電場  $d\vec{E}$

# 連續電荷分佈所建立的電場

- 根據重疊原理，P點的電場為所有微小點電荷所建立的電場之向量和。因此向量和可以由對所有電荷分佈做向量積分來表示：

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{電荷分佈}} \frac{dQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

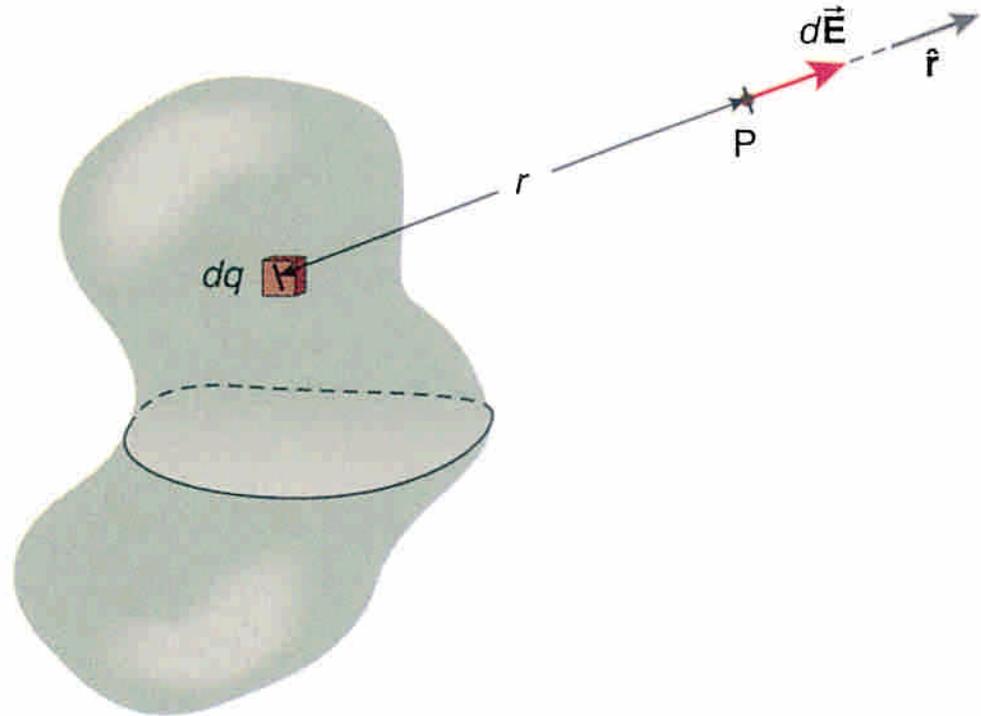


圖 12.72 每一微小電荷  $dq$  ( $dq > 0$ ) 在 P 點產生之電場  $d\vec{\mathbf{E}}$

# 不同電荷分佈的電場1

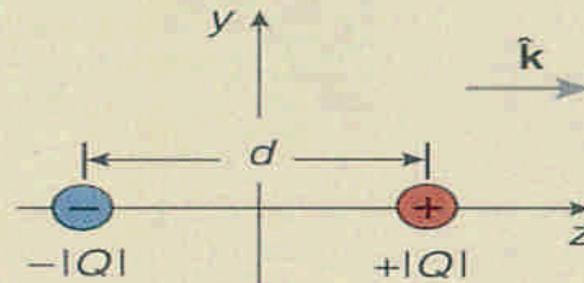
點電荷：

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$



沿電偶極軸線上的點 ( $z \gg d$ ):

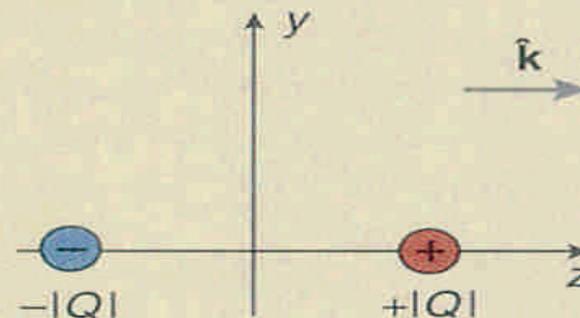
$$\vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{z^3} \hat{k}$$



在垂直平分線上的點：

$$\vec{E}_{\text{total}} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{\left(y^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{3/2}} \hat{k}$$

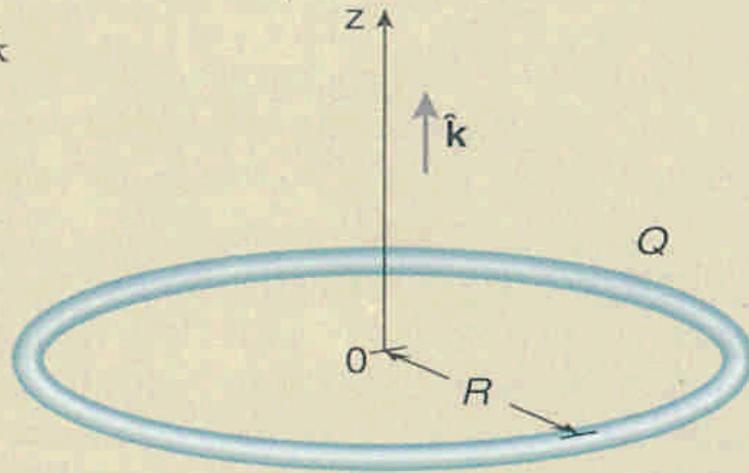
$$\vec{E}_{\text{total}} \approx \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{y^3} \hat{k} \quad (y \gg d)$$



# 不同電荷分佈的電場2

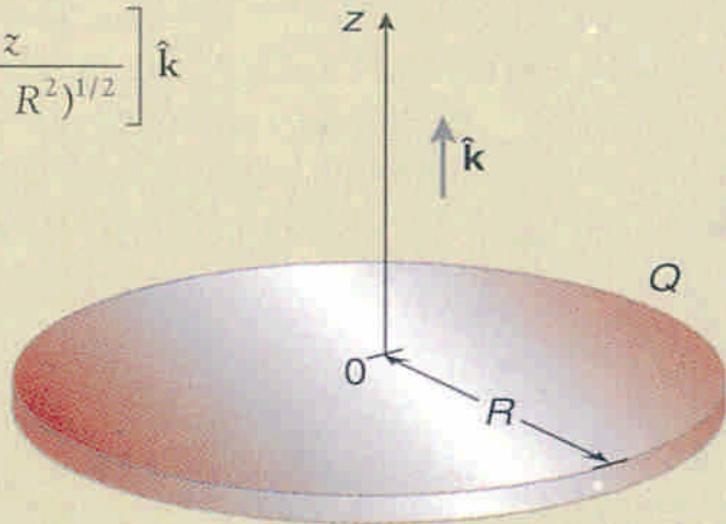
均勻帶電之圓環（在中心軸線上）：

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zQ}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{k}$$



電荷均勻分佈於圓盤上（在軸線上）：

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{R^2} \left[ 1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right] \hat{k}$$



# 不同電荷分佈的電場3

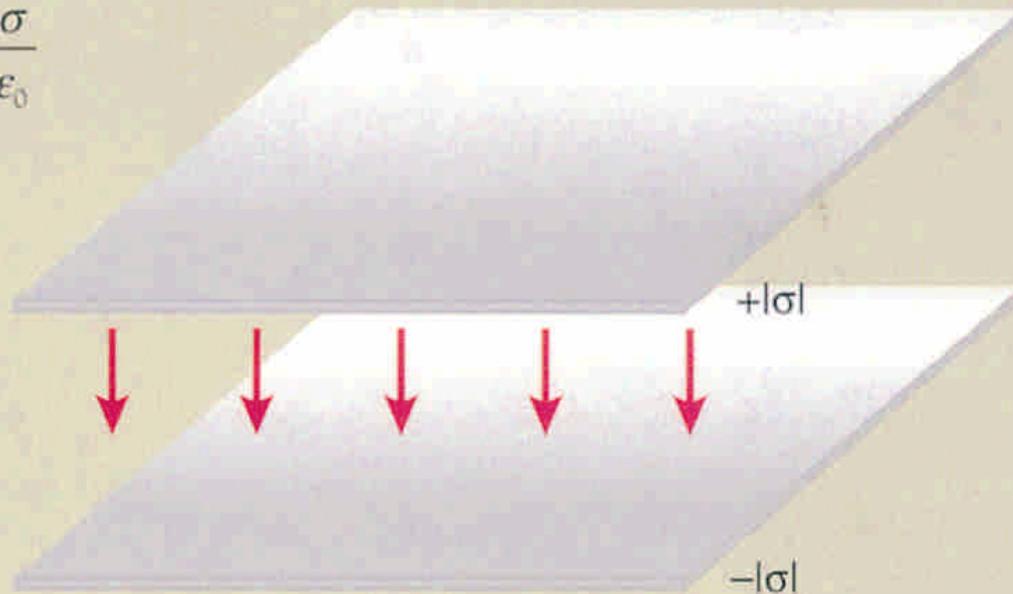
無限大之均勻帶電平面

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



二帶異性電之無限大均勻電帶平面：

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

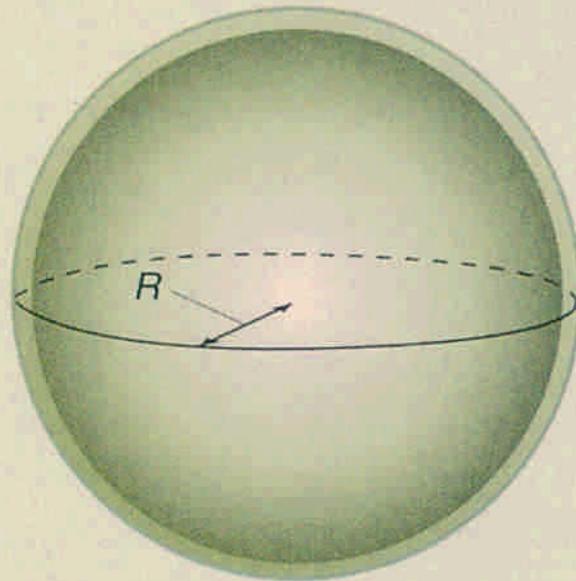


# 不同電荷分佈的電場4

均勻帶電之球殼：

$$\vec{E} = 0 \text{ N/C} \quad (r < R)$$

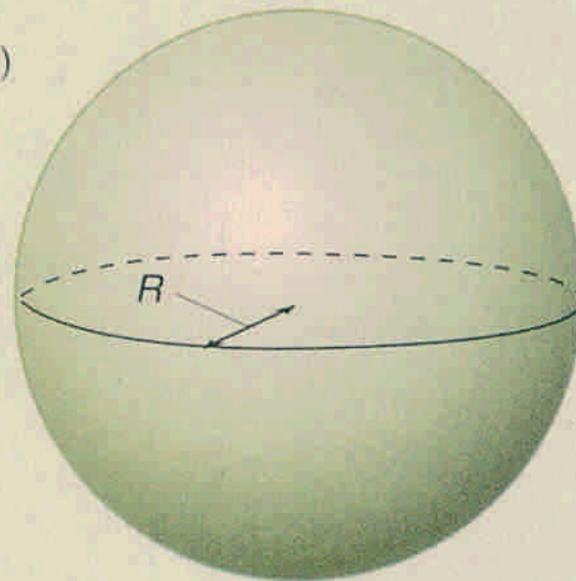
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad (r > R)$$



均勻帶電之實心球：

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r \hat{r} \quad (r < R)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad (r > R)$$

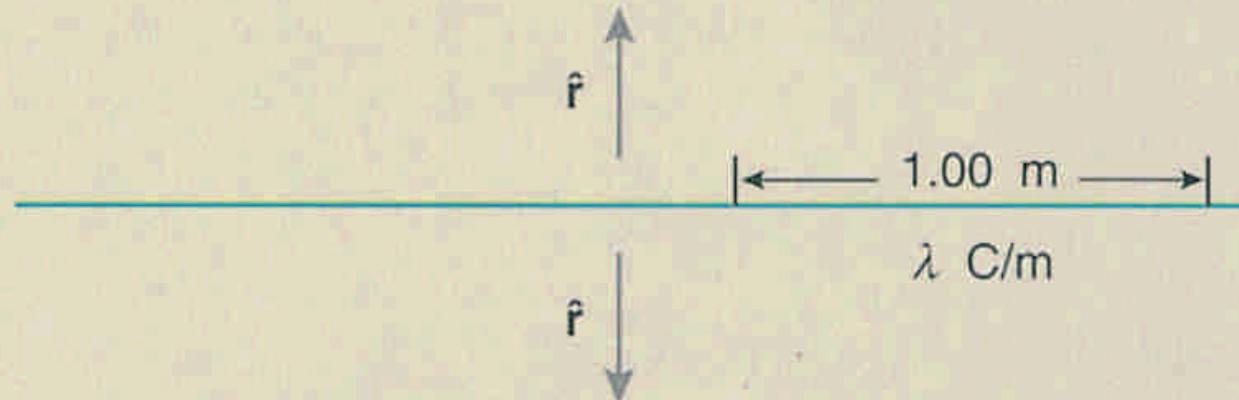


# 不同電荷分佈的電場5

一無限長之帶電直線：

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{r} \hat{r}$$

( 其中  $\hat{r}$  為帶電直線  
垂直向外之單位向量 )



## 例題 12.13

電量均勻分佈於半徑為 $r$ 的圓環上，如圖12.73。試計算在該圓環中心軸線上一點 $P$ 的電場， $P$ 點與圓環中心點 $O$ 相距 $z$ 。

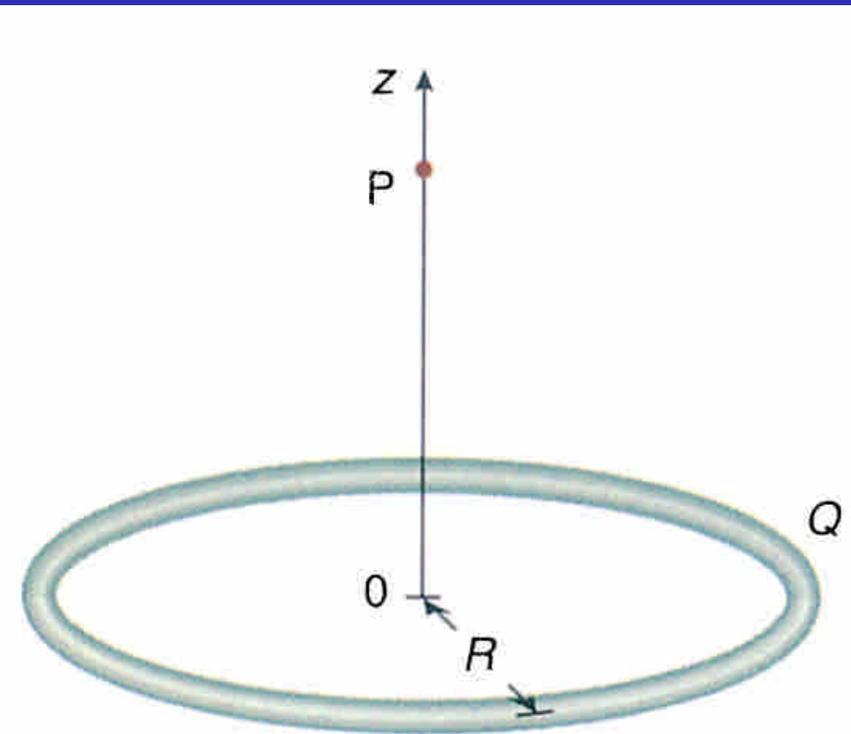


圖 12.73

# 解-1：

電荷  $Q$  既是均勻分佈於圓環上，其線電荷密度 (linear charge density)  $\lambda$  為：

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$$

$$dq = \lambda ds$$

假設圓環上之電荷  $Q$  為正，則此微小電量  $dq$  在  $P$  點所建立的電場  $d\vec{E}$ ，如圖 12.74 所示。



$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{r^2}$$

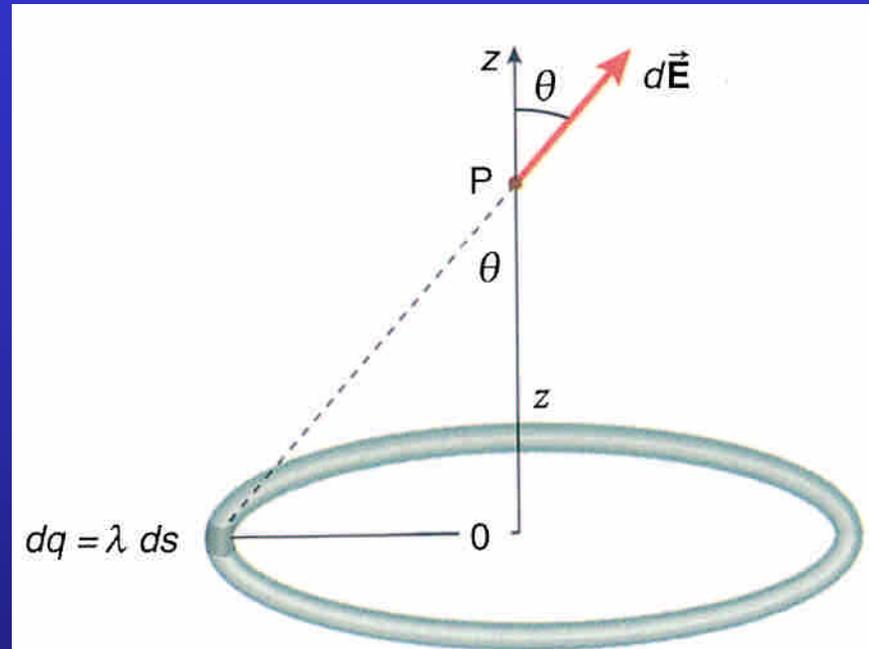


圖 12.74

# 解-2：

在微小電量 $dq$ 的對面的另一小段圓環也帶有電量 $dq$ ，亦會在P外產生一大小相等之電場 $d\vec{E}$ ，如圖12.75所示。此二電場在垂直於軸線上的分量會相消，而在軸線上的分量卻是同向。當二向量做向量和時，只剩下軸線上之分量。

因此，剩下來沿軸線的電場為

$$d\vec{E} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{r^2} \cos\theta \right) \hat{k}$$

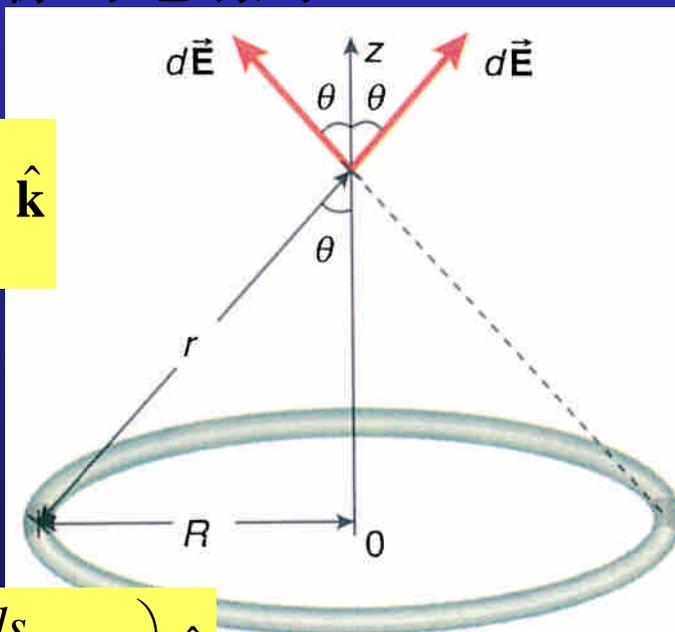


圖 12.75

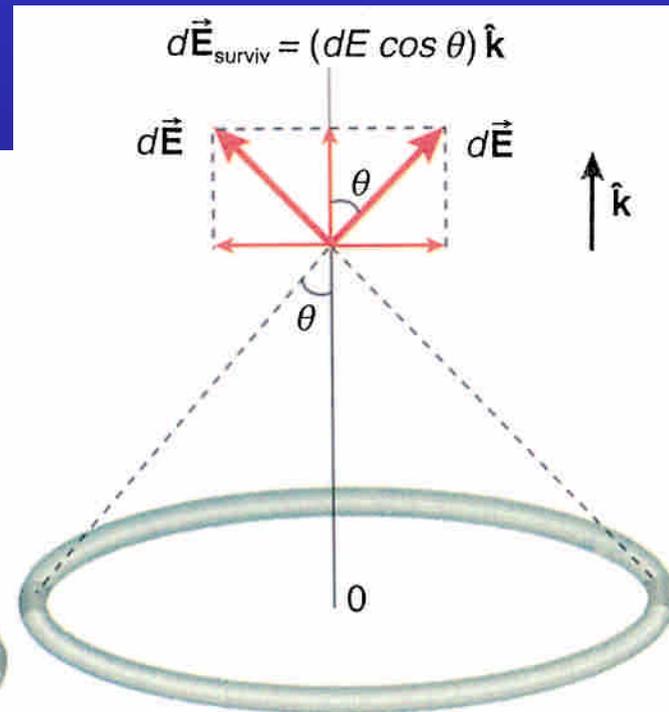


圖 12.76

→ 
$$\vec{E}_{\text{survivor}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{圓環}} \left( \lambda \frac{ds}{r^2} \cos\theta \right) \hat{k}$$

# 解-3：

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{surviv}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{圓環}} \left( \lambda \frac{ds}{r^2} \cos\theta \right) \hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{surviv}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \frac{\cos\theta}{r^2} \int_{\text{圓環}} ds \hat{\mathbf{k}}$$

對圓環積一圈即為圓周長： $2\pi R$

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{surviv}} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \frac{\cos\theta}{r^2} 2\pi R \right) \hat{\mathbf{k}}$$

$$r^2 = z^2 + R^2$$

$$\cos\theta = \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}}$$

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{surviv}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{k}}$$

$$z \gg R$$

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{survive}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{(z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2} \hat{\mathbf{k}}$$

正是點電荷 $Q$ 在 $z$ 處所建立的電場

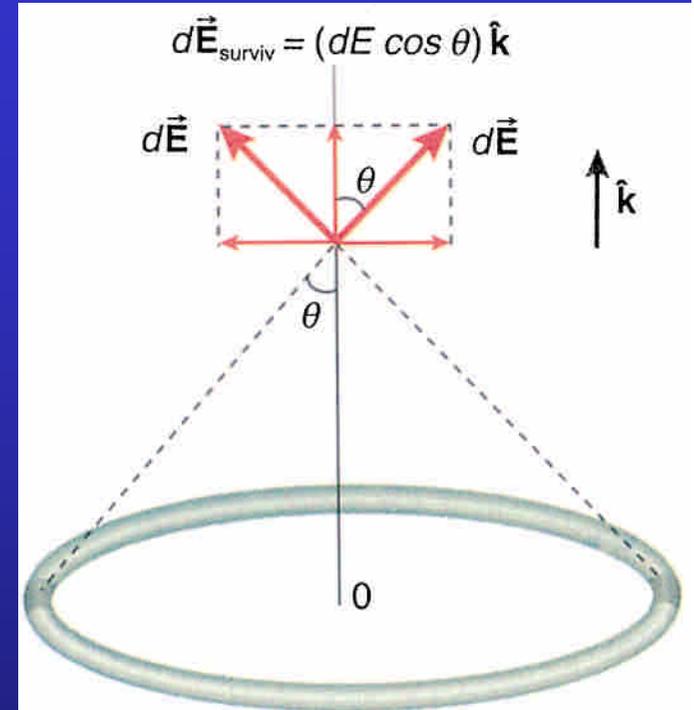
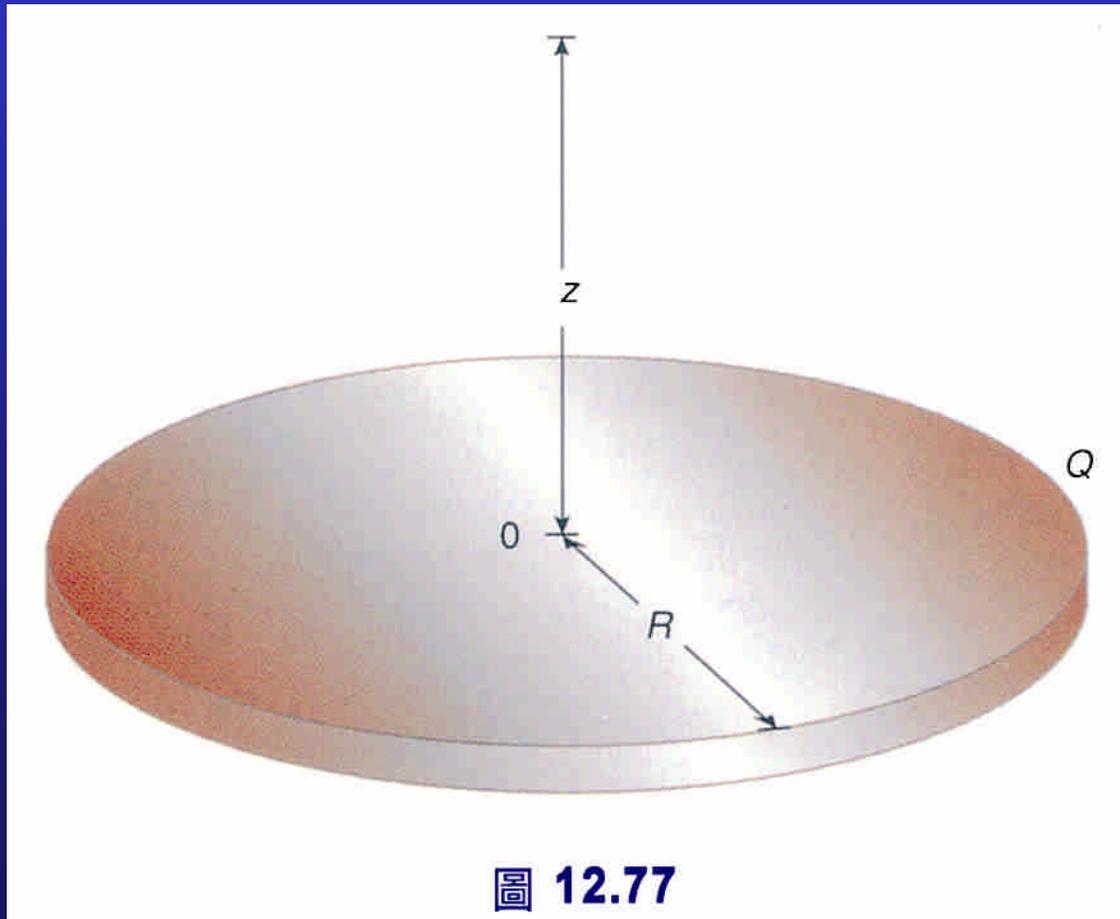


圖 12.76

# 例題 12.14

計算半徑為  $R$  且帶電量為  $Q$  之均勻帶電圓盤在對稱軸線上離盤心  $z$  處之電場 (參考圖12.77)。



# 解-1：

電荷是均勻分佈在圓盤上，  
所以面電荷密度  $\sigma$  (surface charge density) 是一常數，  
且可以計算得

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$$

我們來看一個半徑為  $r$ ，寬度為  $dr$  之圓環；見圖 12.78。

把圓環展開成一長條，如圖 12.79。  
在長條上的電荷  $dq$  為

$$dq = (2\pi r dr)\sigma$$

$$\rightarrow d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z(2\pi r dr \sigma)}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{k}}$$

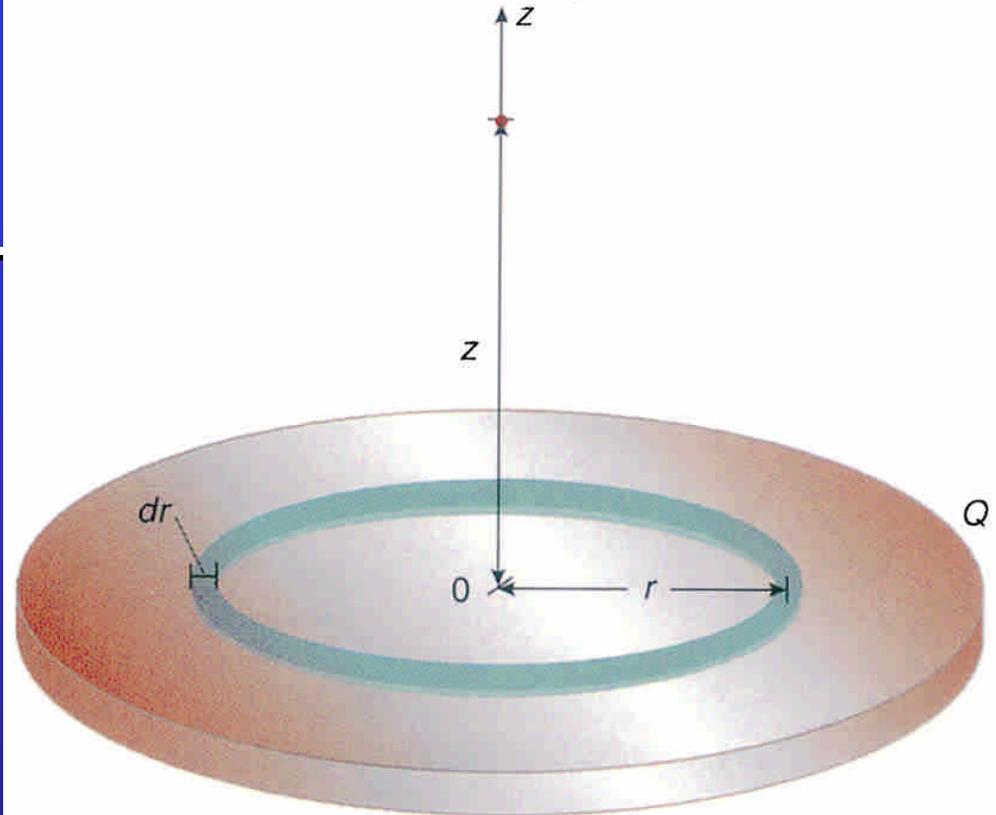


圖 12.78

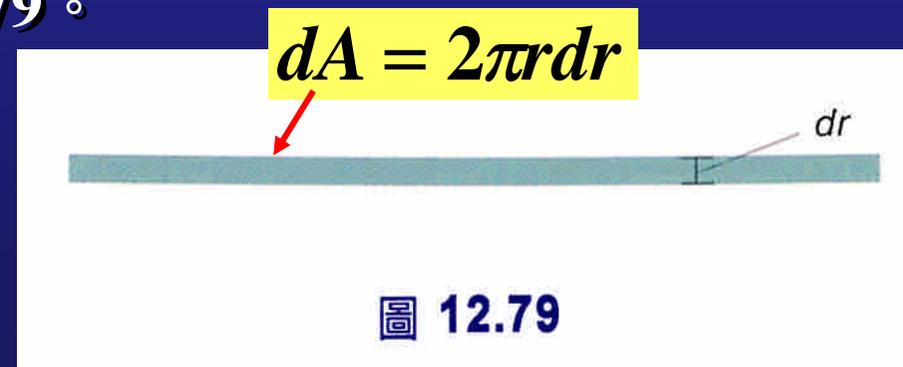


圖 12.79

# 解-2：

對整個圓盤積分

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{E}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{z(2\pi r dr \sigma)}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{k}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} z(2\pi\sigma) \int_0^R \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

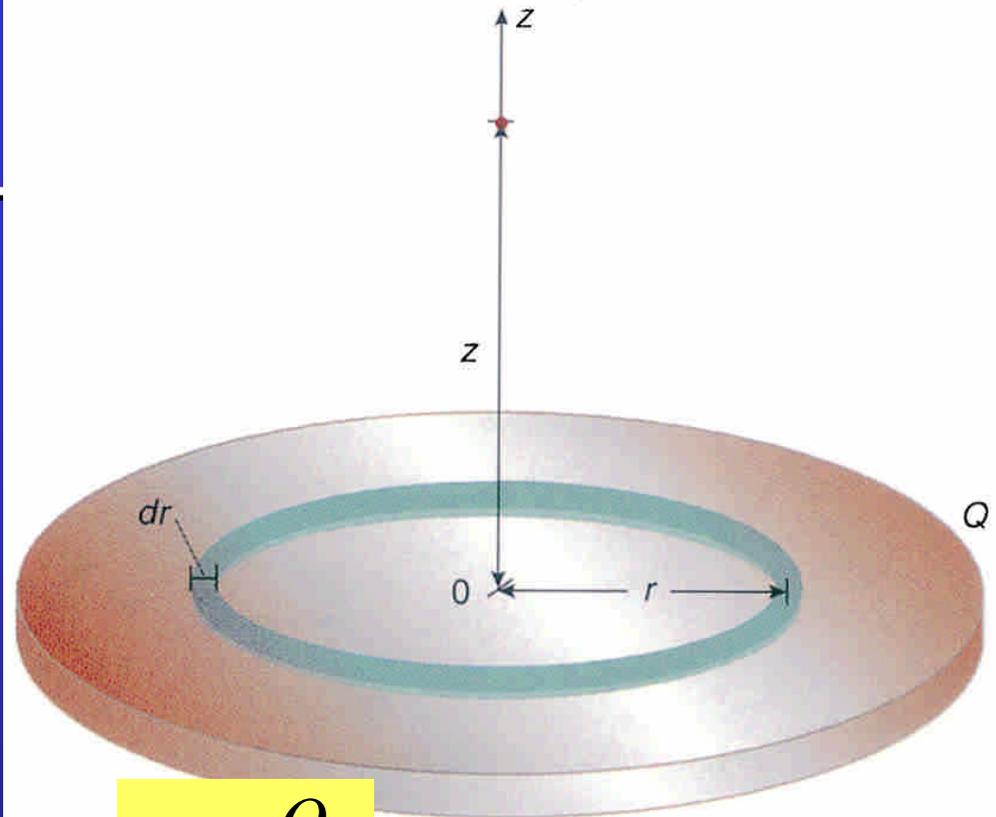
$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} z(2\pi\sigma) \frac{-1}{(z^2 + r^2)^{1/2}} \right]_0^R \hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\sigma \left[ 1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right] \hat{\mathbf{k}}$$

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$$

圖 12.78

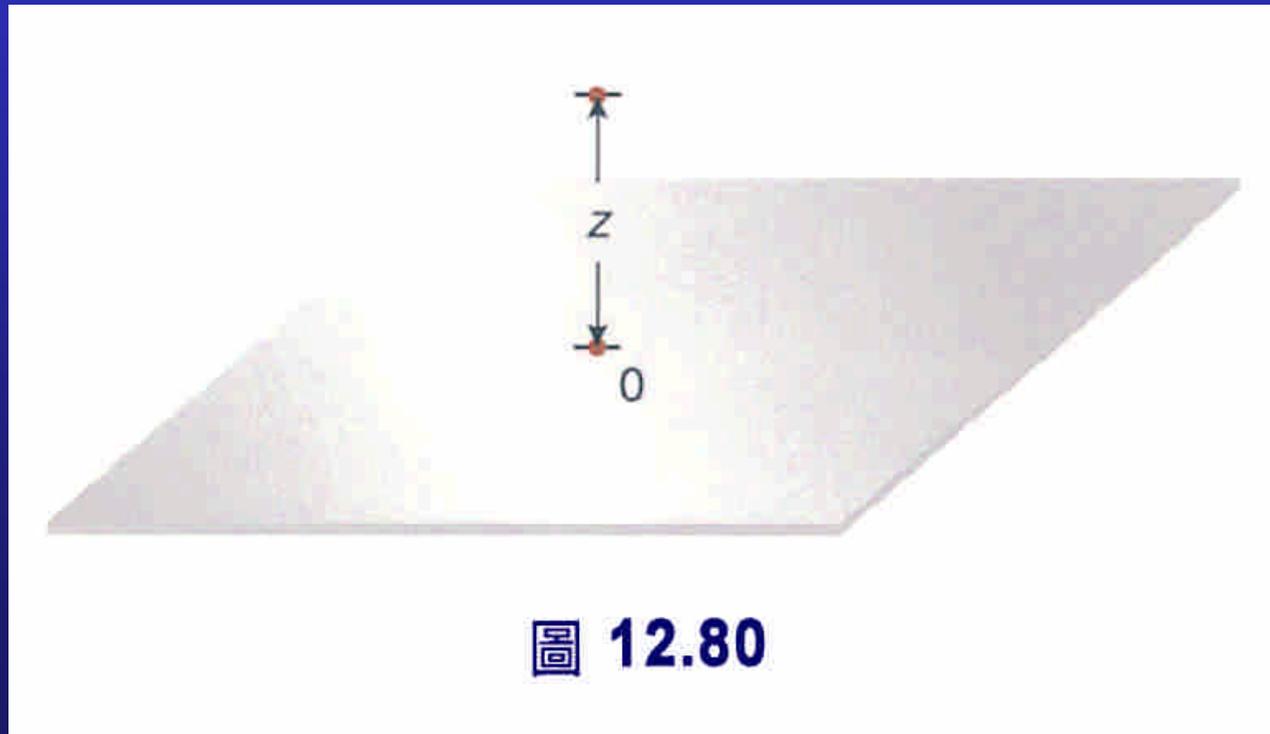


$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{R^2} \left[ 1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right] \hat{\mathbf{k}}$$

注意！  $Q > 0$  對而言，電場是沿著  $+k$  方向，即對稱軸方向。

## 例題 12.15

試計算無限大之均勻帶電平面在離平面  $z$  處，所建立的電場（見圖12.80）



# 解-1：

由上例之 (1) 式所得，可用來計算無限大帶電平面之電場。只要我們將圓盤之半徑取為無限大：

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\sigma \left[ 1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right] \hat{\mathbf{k}}$$



$$\vec{\mathbf{E}} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\sigma \left[ 1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right] \hat{\mathbf{k}}$$

當  $R$  越來越大，第二項則愈趨近於0，而  $E$  可取近似為



$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

## 解-2：



$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

- 如果帶電平面上之電荷為正值，電場的方向為垂直並遠離帶電平面，如圖12.81。
- 如果電荷為負，電場方向為垂直並指向平面，如圖12.82。
- 
- 這種無限大帶電平面所產生的電場為一常數，或稱**均勻電場**。

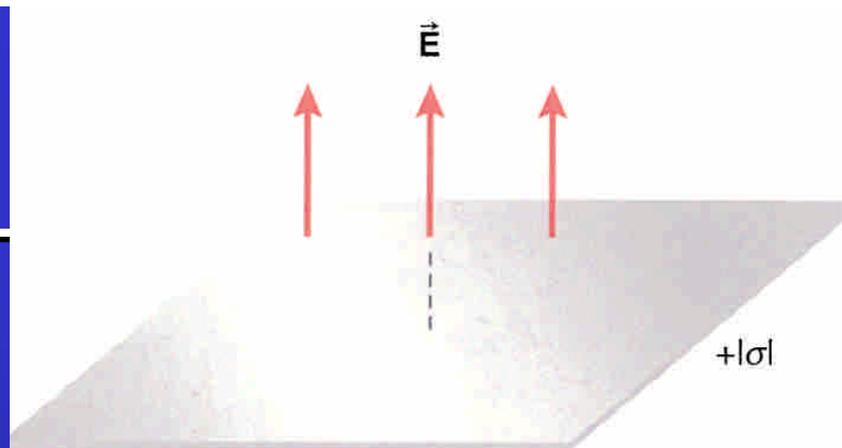


圖 12.81

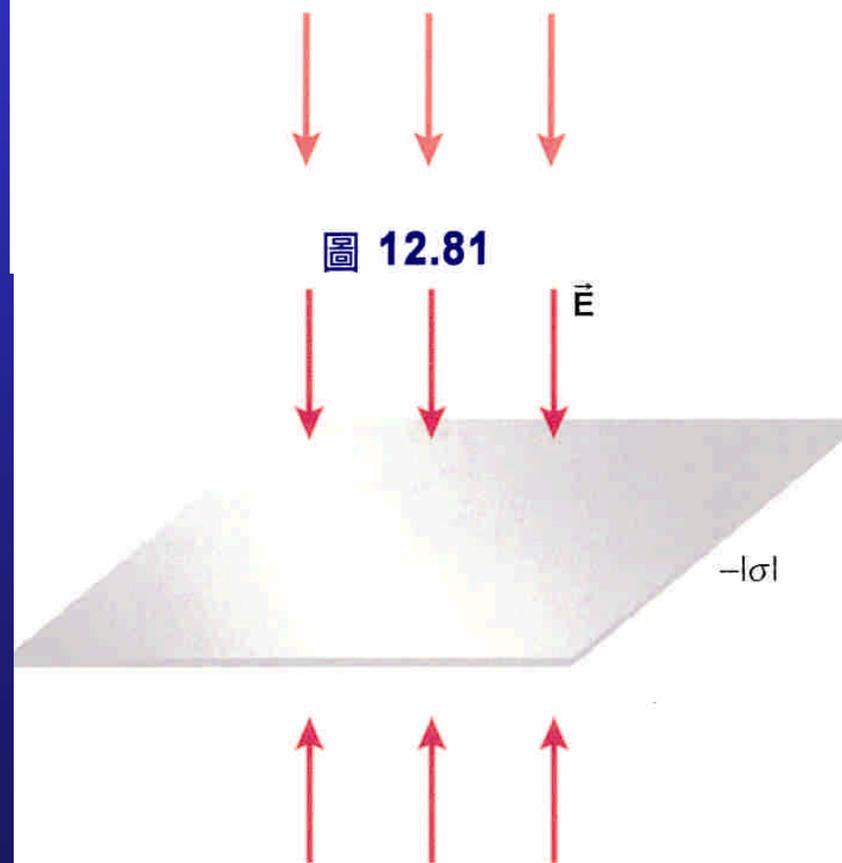
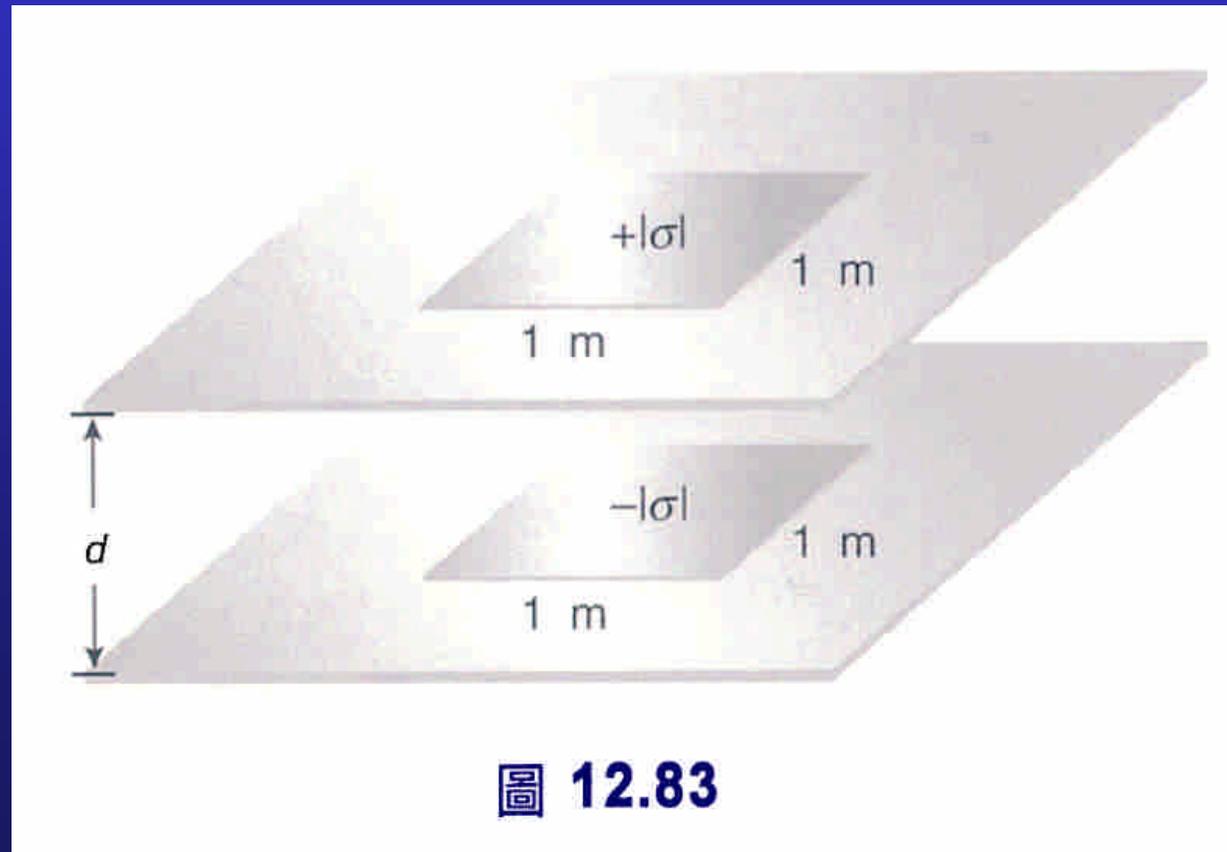


圖 12.82

# 例題 12.16

兩個帶異性電之無限大帶電平面相距且平行；如圖12.83。試計算二平行板間及平行板外之電場。

。



# 解：

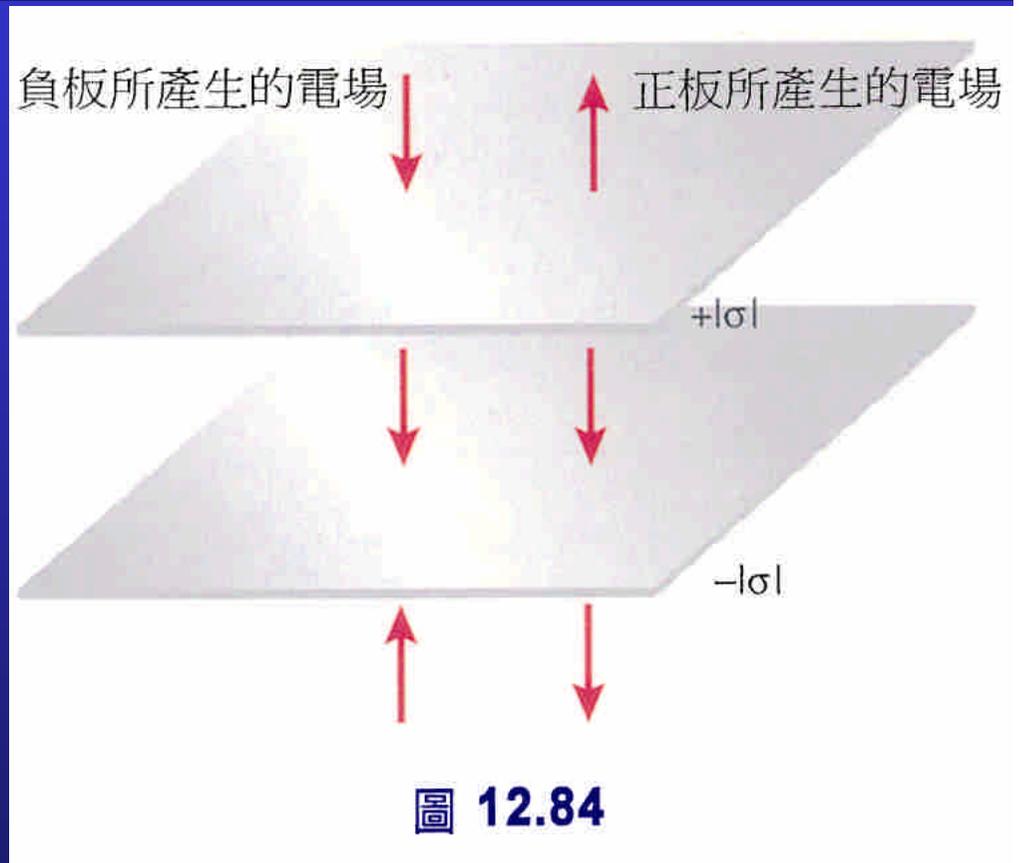
我們可以用重疊原理計算電場。由二帶電平行板在不同區域所產生的電場分別標於圖12.84中。

正板上方與負板下方的電場均為0。因為來自正板或負板所建立的電場在此二區域完全抵消。

而介於兩板間之電場因為同向，其電場和為

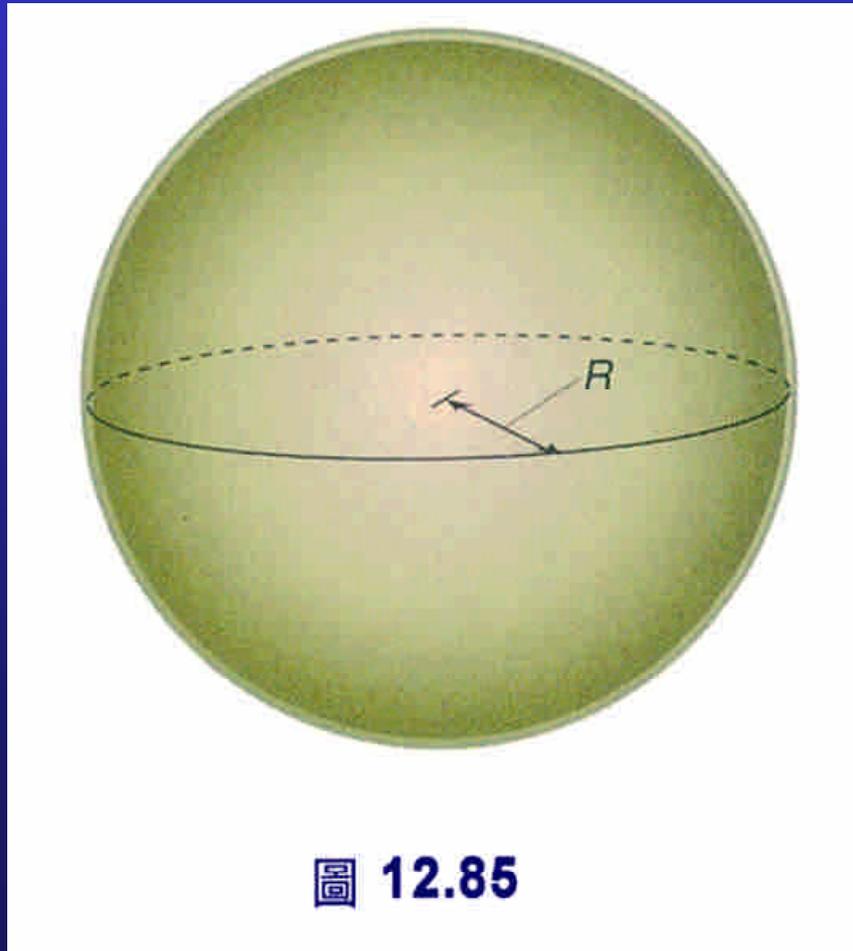
$$\rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

這樣的裝置為**平行板電容器 (parallel plate capacitor)**，也是實驗室用來產生均勻電場最典型的方法。



## 例題 12.17

半徑為 $R$ 之均勻帶電球殼，帶電電量為 $Q$ ，參考圖12.85。試計算球殼內( $r < R$ )、外( $r > R$ )之電場



# 解：

具有質量之質點間的萬有引力作用與帶電質點間的電力作用都屬平方反比力。從數學的觀點，在第4章我們對質點有引力場的計算可以運用到同樣幾何構造的電場上來。

舉例來說，在第4章我們發現在質量分佈均勻的球殼，作用於球殼內部且質量為 $m$ 之質點的萬有引力為0：

$$F_{m, \text{球殼內部}} = 0 \text{ (N)}$$

又因  $\vec{F}_m = m\vec{g}$ ，所以  $\mathbf{g} = 0 \text{ N / kg}$

這樣的結果，緣自於萬有引力是平方反比力的關係。

既然電力作用也是平方反比力，我們可以不用證明，就說均勻帶電球殼內部之電場亦為0。亦即

$$E_{\text{球殼內部}} = 0 \quad (r < R)$$

同樣的道理，在球殼的外部亦可沿用第4章的結果，推論得電場應為

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (r > R)$$

# 例題 12.18

半徑為 $R$ 之均勻帶電實心球，電荷 $Q$ 均勻分佈於實心球內，見圖12.86試計算 $E(r < R)$ 與 $E(r > R)$ 。

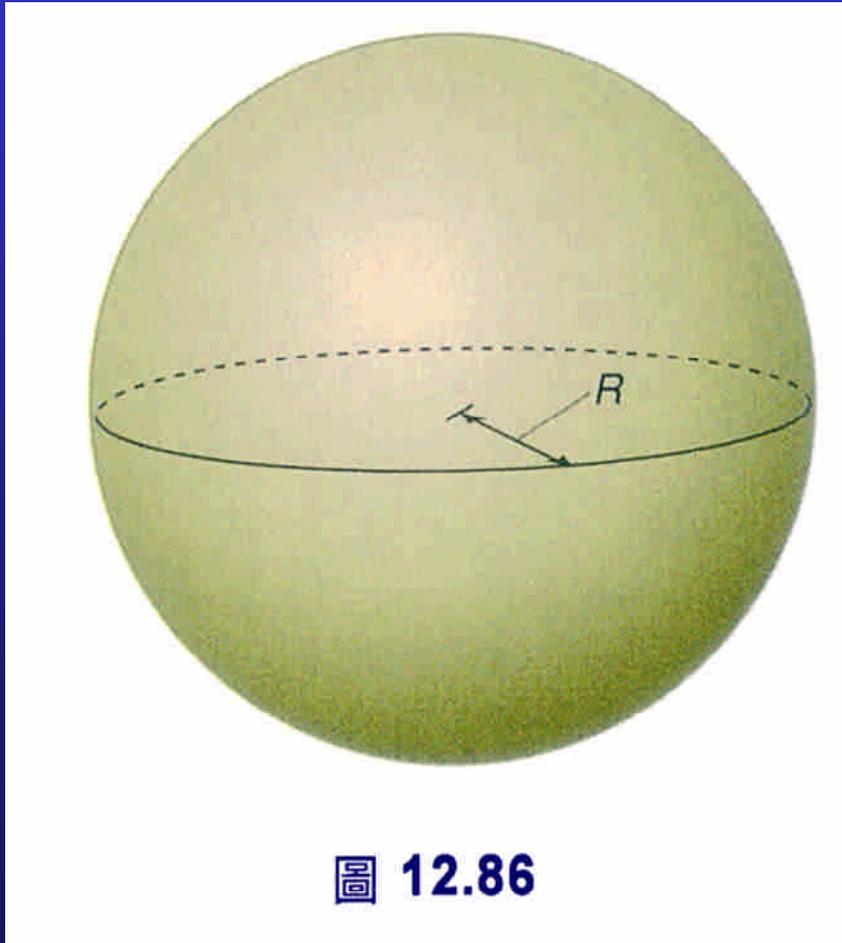


圖 12.86

解：

此一問題，亦可以由第4章得來


$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r \hat{\mathbf{r}} \quad (r < R)$$

同理，球體外部之電場，亦可視為點電荷  $Q$  置於球心在  $r$  處所建立之電場：


$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (r > R)$$

# 例題 12.19

一帶電質點，質量為  $m$ ，帶電量為  $q$ ，由靜止狀態自靠近平行板之一板釋放，該電荷一路被此一電場加速。已知電場大小為  $E_0$ ，平行板間距為  $d$ ，試計算該質點抵達另一板之瞬時速率。

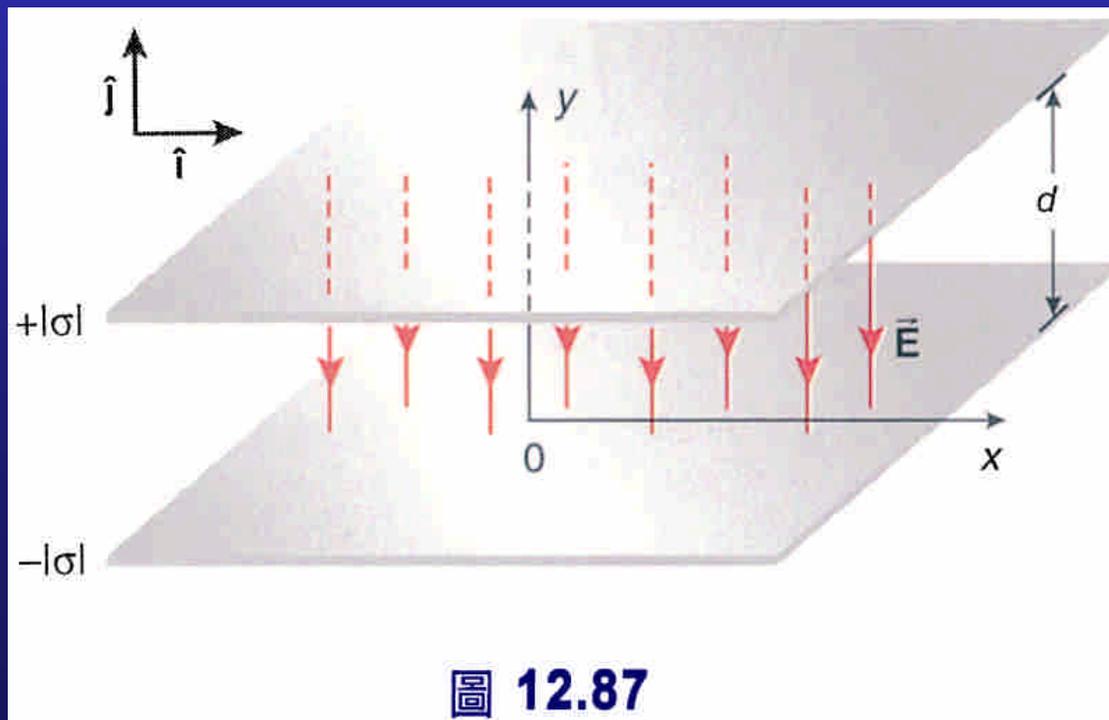


圖 12.87

# 解-1：

參考圖12.87之參考坐標，電場可表示為

$$\vec{\mathbf{E}} = -E_0 \hat{\mathbf{j}}$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{F}} &= q\vec{\mathbf{E}} = q(-E_0 \hat{\mathbf{j}}) \\ &= -qE_0 \hat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

由牛頓第二定律  $\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{m} = \frac{-qE_0}{m} \hat{\mathbf{j}} \quad \rightarrow \quad a_y = \frac{-qE_0}{m}$$

由等加速運動之式子

$$v_y = v_{y0} + a_y t$$

$$y = y_0 + v_{y0} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

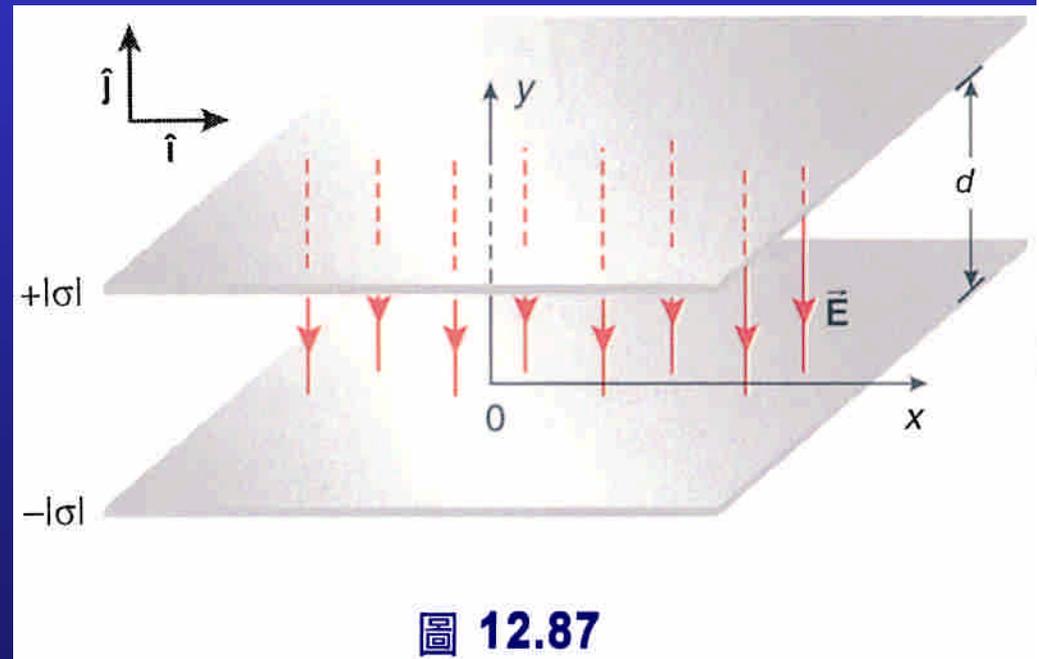


圖 12.87

# 解-2：

既然，帶電質點是由靜止狀態被釋放， $v_{y0} = 0$ 。假設為 $q$ 正，且自  $y_0 = d$  處被釋放。

$$v_y = a_y t = \frac{-qE_0}{m} t$$

$$y = d + \frac{1}{2} a_y t^2 = d - \frac{1}{2} \frac{qE_0}{m} t^2$$

帶電質點最後抵  $y=0$ 。因此

$$0 = d - \frac{1}{2} \frac{qE_0}{m} t^2$$

$$d = \frac{1}{2} \frac{qE_0}{m} t^2$$

$$t = \left( \frac{2dm}{qE_0} \right)^{1/2}$$

$$v_y = -\frac{qE_0}{m} \left( \frac{2dm}{qE_0} \right)^{1/2} = -\left( 2d \frac{qE_0}{m} \right)^{1/2}$$

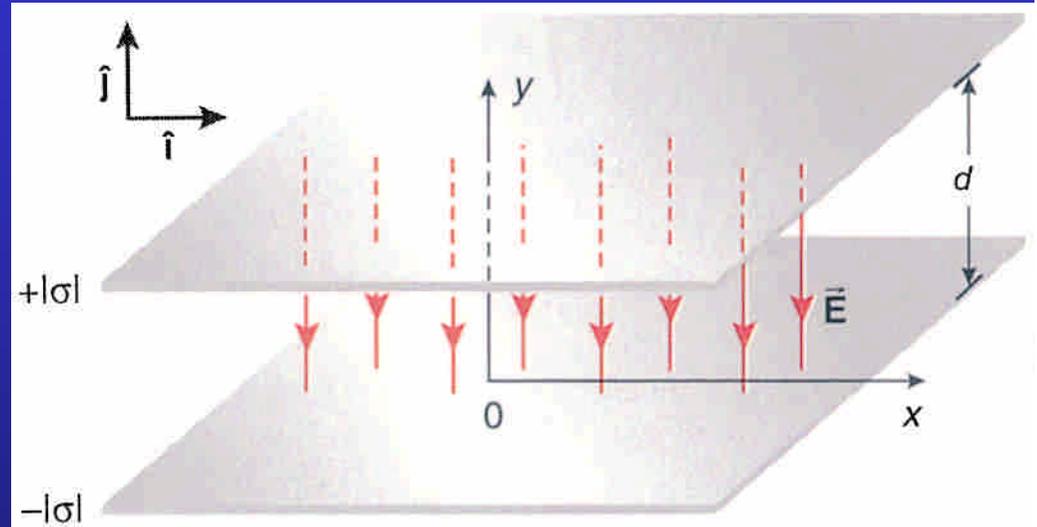
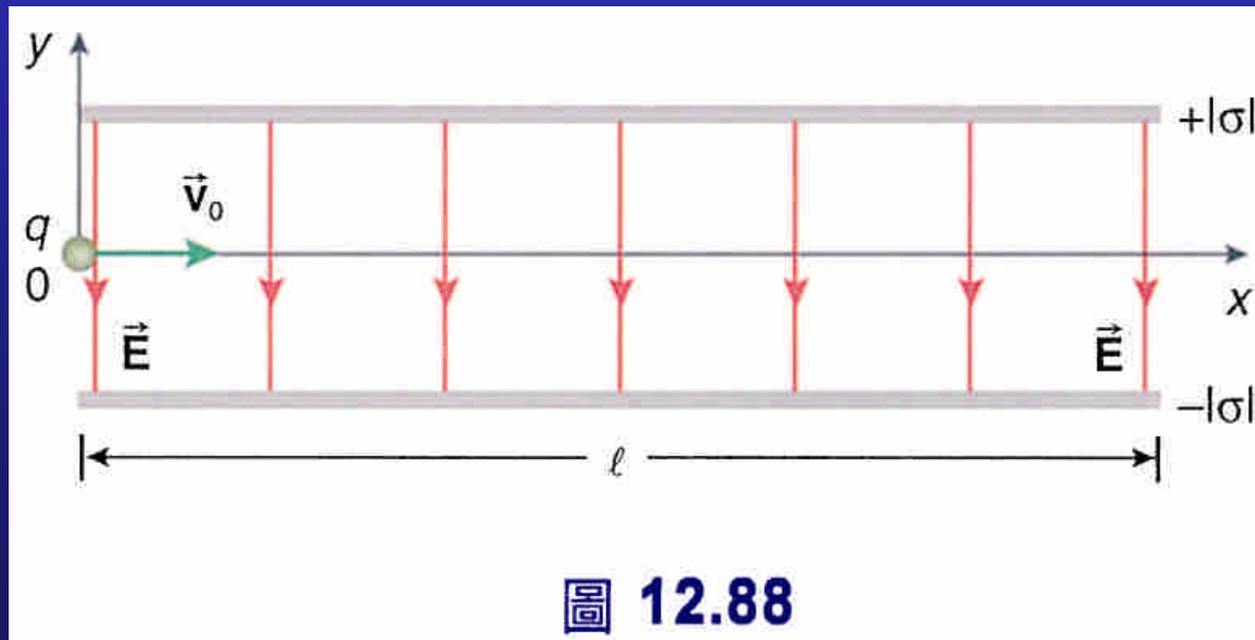


圖 12.87

## 例題 12.20

一質量為  $m$ ，帶電量為  $q$  之帶電質點以之初速  $\vec{v}_0$  垂直進入一均勻電場，見圖12.88。試計算其離開長度為  $l$  之電場時，偏移若干？



解：

參考圖12.88之坐標。

$$\vec{v}_0 = v_{x0} \hat{i}$$

$$\vec{E} = -E_0 \hat{j}$$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$= q(-E_0 \hat{j})$$

$$a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{-qE_0}{m}$$

$$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

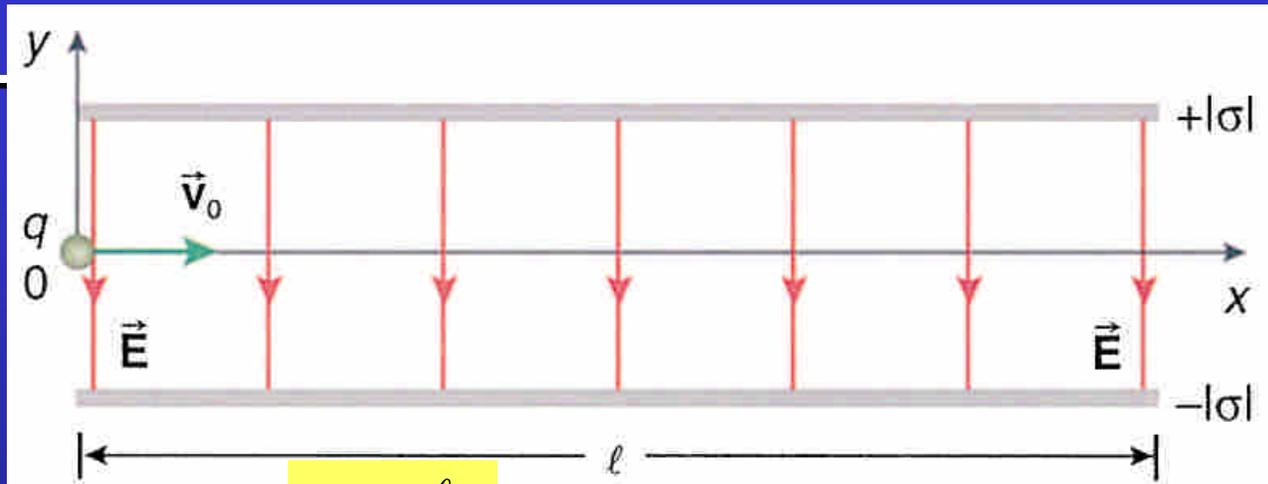
$$y_0 = 0$$

$$v_{y0} = 0$$

$$y = \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$t = \frac{\ell}{v_{x0}}$$

12.88



$$y = \frac{1}{2} \left( -\frac{qE_0}{m} \right) \left( \frac{\ell}{v_{x0}} \right)^2$$

# 12.10 高斯定律

## ➤ 通量

貫穿一微小面積  $d\vec{S}$  之任一向量  $\vec{A}$  的通量 (flux)  $d\Phi$  為向量  $\vec{A}$  通過面積之程度的量測。我們用純量積定義向量  $\vec{A}$  之通量：

$$d\Phi = \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi = \int_{\text{area } S} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

在重力場裡，我們得在任一封閉曲面內之重力場通量與其該封閉曲面內之質量  $M$  的關係為

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi GM$$

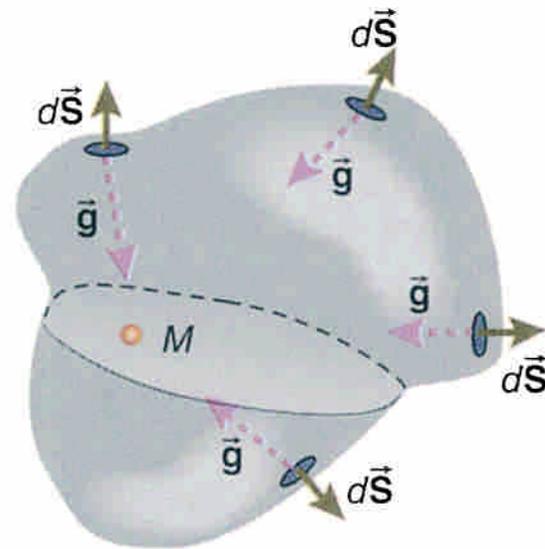


圖 12.89 對重力而言， $M$  在  $S$  內，重力場  $\vec{g}$  向內，而  $d\vec{S}$  是向外的。

# 高斯定律

➤ 要將重力場之轉換至電場，我們做下列替換

1.  $\vec{E}$  以取代  $\vec{g}$ 。
2. 用  $|Q|$  代替  $M$ 。
3. 萬有引力常數  $G$  由對應之電力常數  $1/4\pi\epsilon_0$  來取代。

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = -4\pi \frac{1}{4\pi\epsilon_0} |Q|$$
$$= \frac{-|Q|}{\epsilon_0}$$

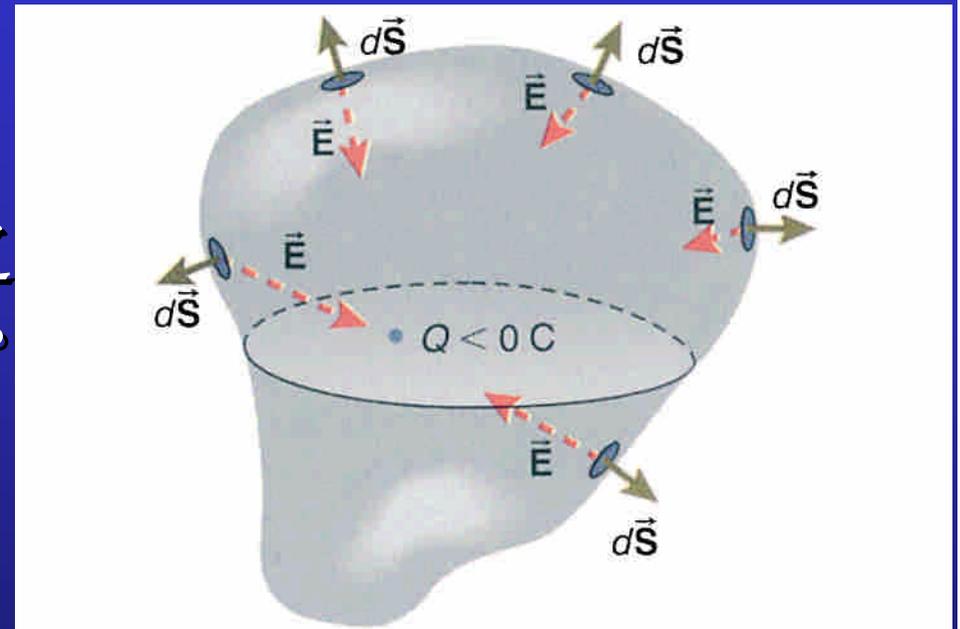


圖 12.90 負電荷所建立的電場指向負電荷

既然本身是負的，我們可以去絕對值得

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

此式亦適用於正電荷。

# 高斯定律

- 更一般些，我們所做的封閉曲面所包含的電荷若不只一個，而是包含  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$  時，則可由重疊原理將 (12.17) 式改寫成

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_1}{\epsilon_0} + \frac{Q_2}{\epsilon_0} + \frac{Q_3}{\epsilon_0} + \dots$$

應注意  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$  等電荷之正、負號。

- 電場之高斯定律可以總結為：

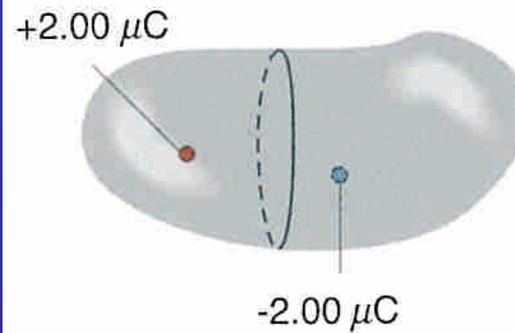
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\oint dq}{\epsilon_0}$$

任一封閉曲面之電通量與其所包含之總電荷  $\oint dq$  成正比。

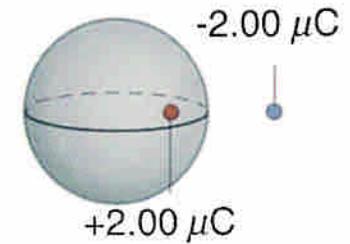
對這假想之封閉曲面，我們稱之為高斯面 (Gaussian surface)。它可以是任何幾何形狀，但一定要“封閉”。高斯定律是電磁學四個基本定律——馬克斯威爾方程式 (Maxwell equations) 之一。

# 例題 12.21

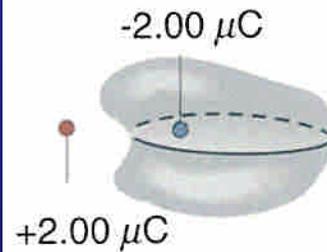
計算圖12.91 a~d  
中之高斯面的電  
通量。



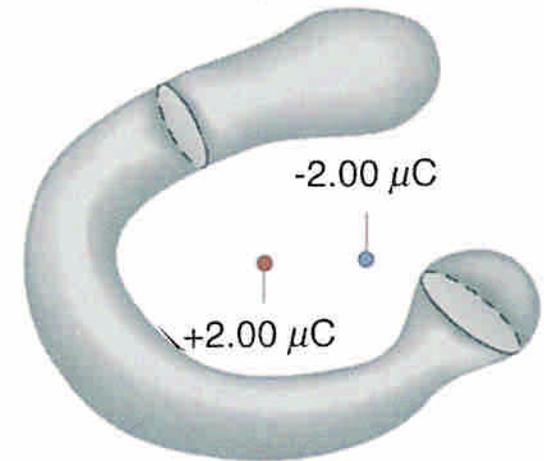
(a)



(b)



(c)



(d)

圖 12.91

解：

a. 高斯面內之淨電荷為0，所以電通量亦為0

b. 高斯面內之淨電荷為  $-2.00 \mu\text{C}$

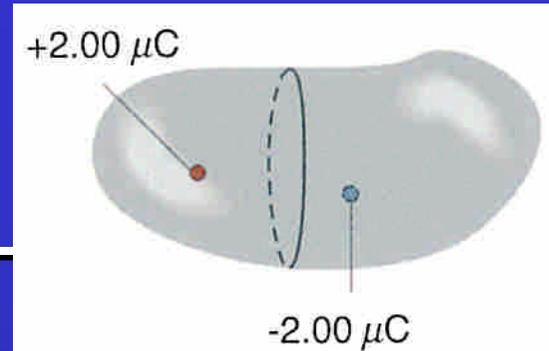
$$\Phi = \frac{+2.00 \times 10^{-6}}{\epsilon_0} = \frac{+2.00 \times 10^{-6}}{8.85 \times 10^{-12}} = 2.26 \times 10^5 \text{ (N} \cdot \text{m}^2 / \text{C)}$$

c. 在高斯面內之淨電荷為  $+2.00 \mu\text{C}$

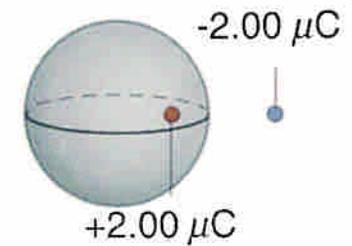
$$\Phi = \frac{-2.00 \times 10^{-6}}{8.85 \times 10^{-12}} = -2.26 \times 10^5 \text{ (N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2)$$

d. 高斯面內之總電荷為0

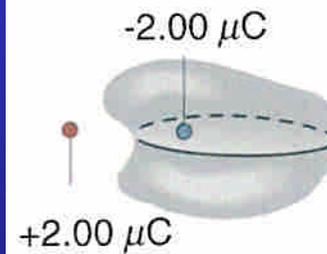
$$\therefore \Phi = 0$$



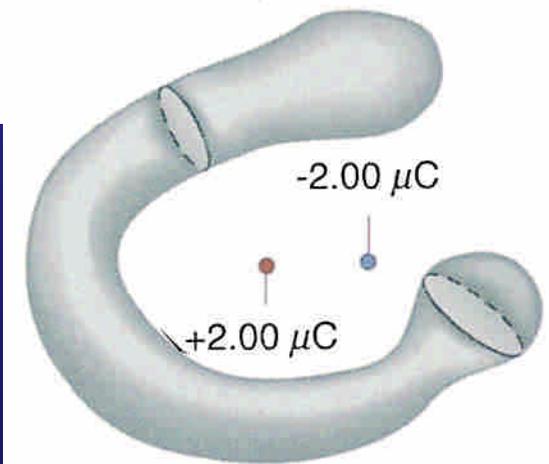
(a)



(b)



(c)



(d)

# 12.11 利用高斯定律計算電場大小

- 單獨點電荷所建立之電場  
以點電荷 $Q$ 來說，若我們選定以電荷 $Q$ 相距 $r$ 之球面為高斯面，參考圖12.92，則此高斯球面上的電場應相等。

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma Q_i}{\epsilon_0}$$

$$\oint E dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

既然，球面上各點之 $E$ 相等，積分式中 $E$ 可提到積分符號的外面

$$E \oint dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

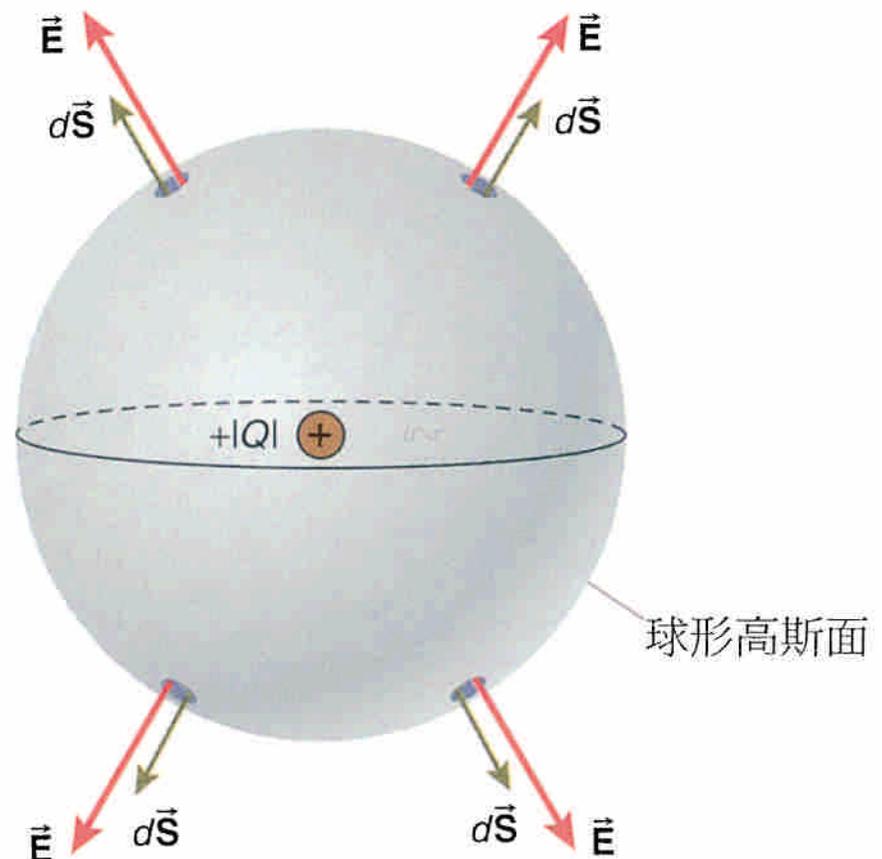


圖 12.92 點電荷在  $r$  處所建立之電場

# 單獨點電荷所建立之電場

如果點電荷 $Q$ 為負值，則電場方向改為沿半徑指向內，如圖12.93。如此一來， $\vec{E}$ 與 $d\vec{S}$ 反平行，則高斯定律左式為負

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma Q_i}{\epsilon_0}$$

$$\oint E dS = \frac{-|Q|}{\epsilon_0}$$

$$-E \oint dS = \frac{-|Q|}{\epsilon_0}$$



$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|}{r^2}$$

不論 $Q$ 是正或是負，電場的大小都一樣。

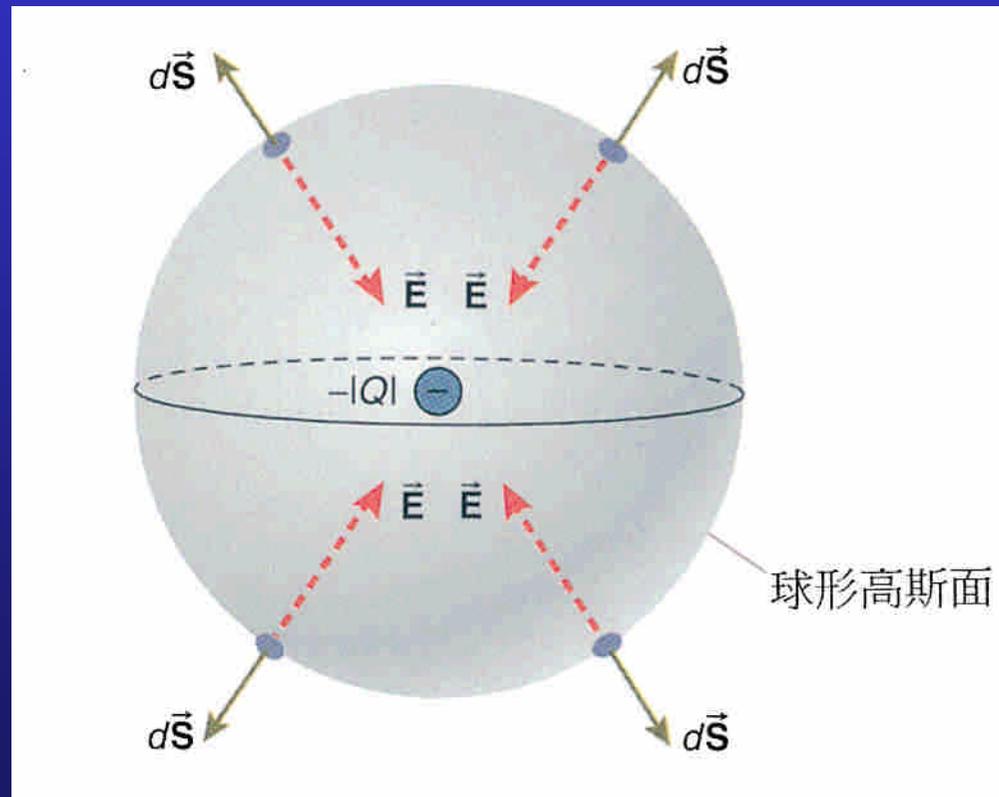


圖 12.93 帶負電之點電荷所建立之電場指向點電荷

# 無限長均勻帶電直線所建立的電場

設線電荷密度為  $|\lambda|$  之無限長帶電直線如圖 12.94。

由電荷分佈的對稱性可推得電場是由直線輻射向外，且與帶電直線相距  $r$  之各點的電場都相等。由幾何對稱的觀點來看，此問題較理想的高斯面為圓柱面，見圖 12.95。

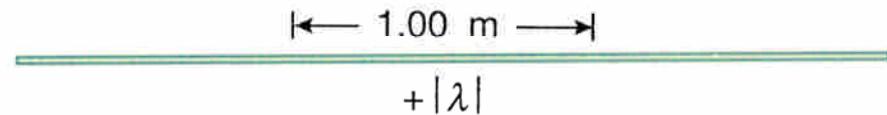


圖 12.94 線電荷密度為  $\lambda$  之無限長帶電直線

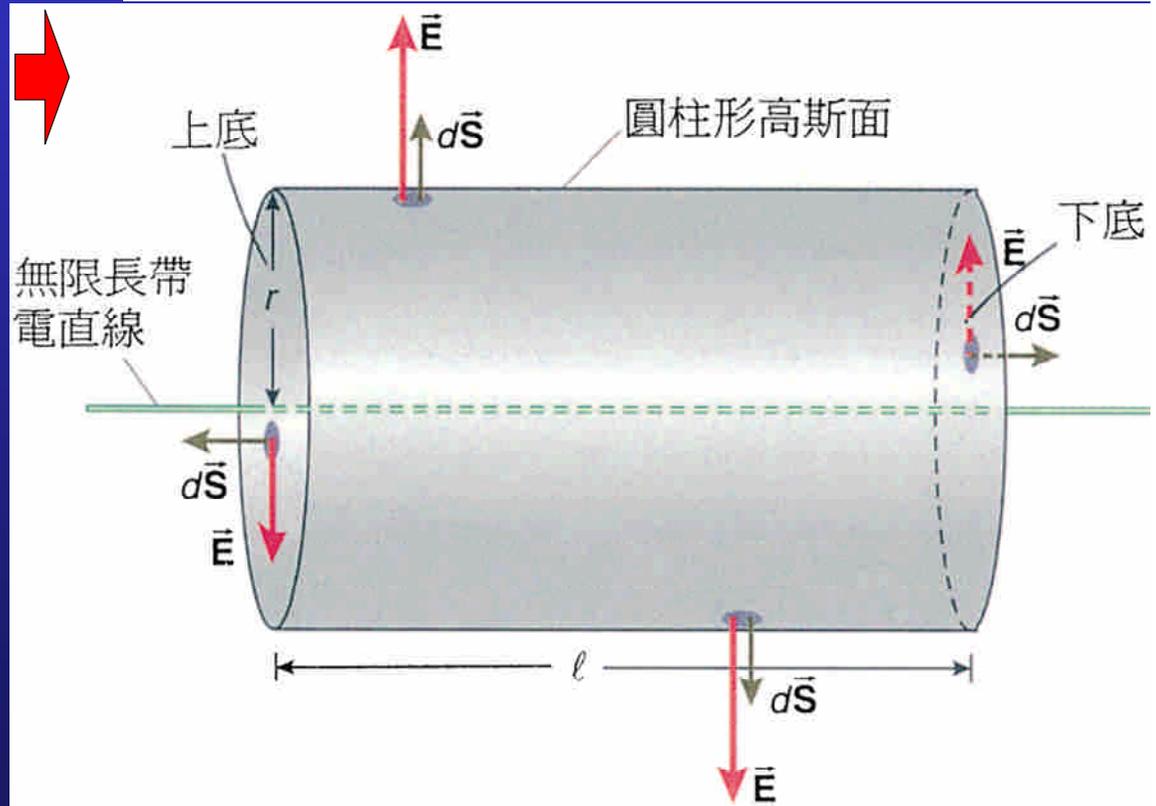


圖 12.95 帶電直線之圓柱形高斯面

# 無限長均勻帶電直線所建立的電場

此高斯圓柱面包含了圓柱面四周及上下底：

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{周圍}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{上底}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{下底}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

而在高斯圓柱面之上、下底的微小面積  $d\vec{S}$  總與電場  $\vec{E}$  垂直。換句話說，圓柱面底部之電通量為0  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$

$$\int_{\text{周圍}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{周圍}} E dS = E \int_{\text{周圍}} dS = E(2\pi r \ell)$$

$$E(2\pi r \ell) = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{2\lambda}{r}$$

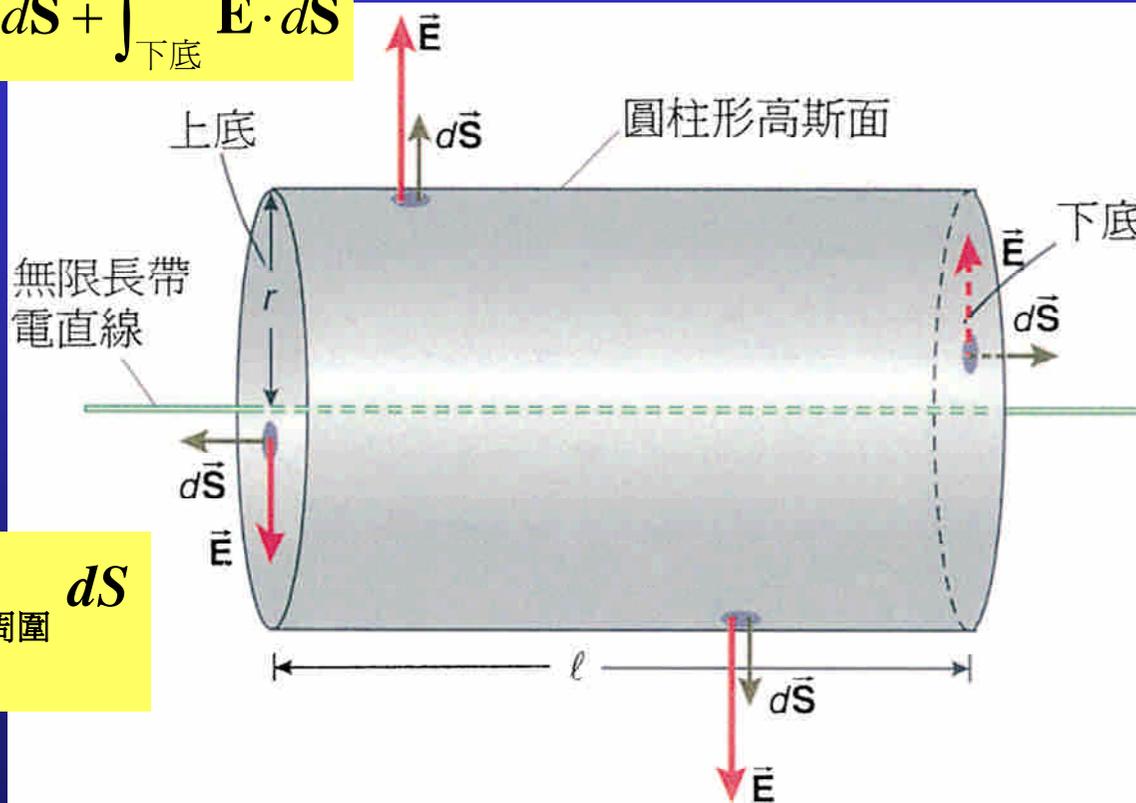


圖 12.95 帶電直線之圓柱形高斯面

# 均勻帶電實心球所建立之電場

- 電荷均勻分佈於半徑為  $R$  之整個球體內。我們想計算球體內部 ( $r < R$ ) 之電場大小，如圖 12.96。

我們選定與帶電球體之同球心的球面為高斯面。高斯球面上各點的電場大小會相等，且電場方向與球面上微小面積  $d\vec{S}$  同方向。

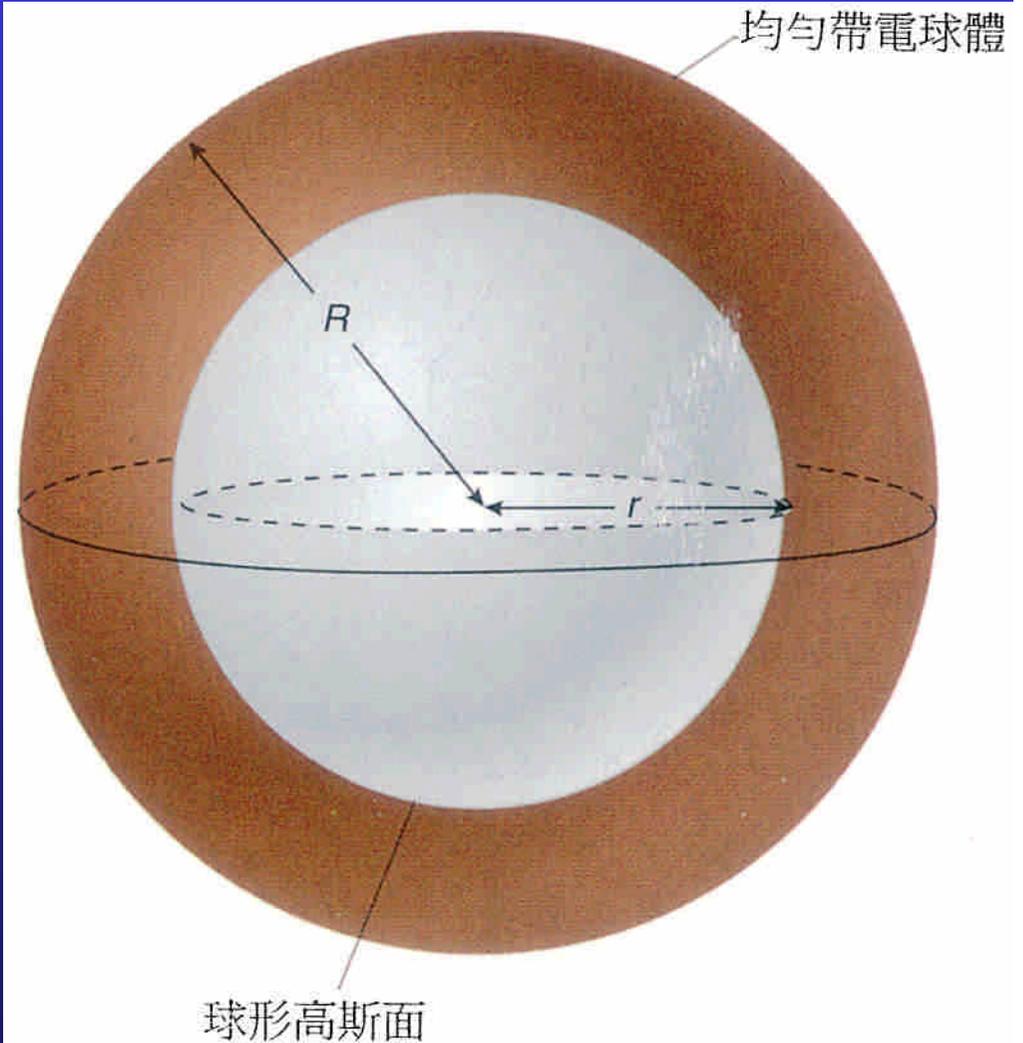


圖 12.96 均勻帶電實心球體

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\oint dq}{\epsilon_0}$$

$$E \oint dS = \frac{\oint dq}{\epsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{\oint dq}{\epsilon_0}$$

$$\rho = \frac{|Q|}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

高斯球面內的電荷為

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{|Q|}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\oint dq = \frac{r^3}{R^3} |Q|$$

→  $E(4\pi r^2) = \frac{r^3}{R^3} \frac{|Q|}{\epsilon_0}$

→  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|}{R^3} r$

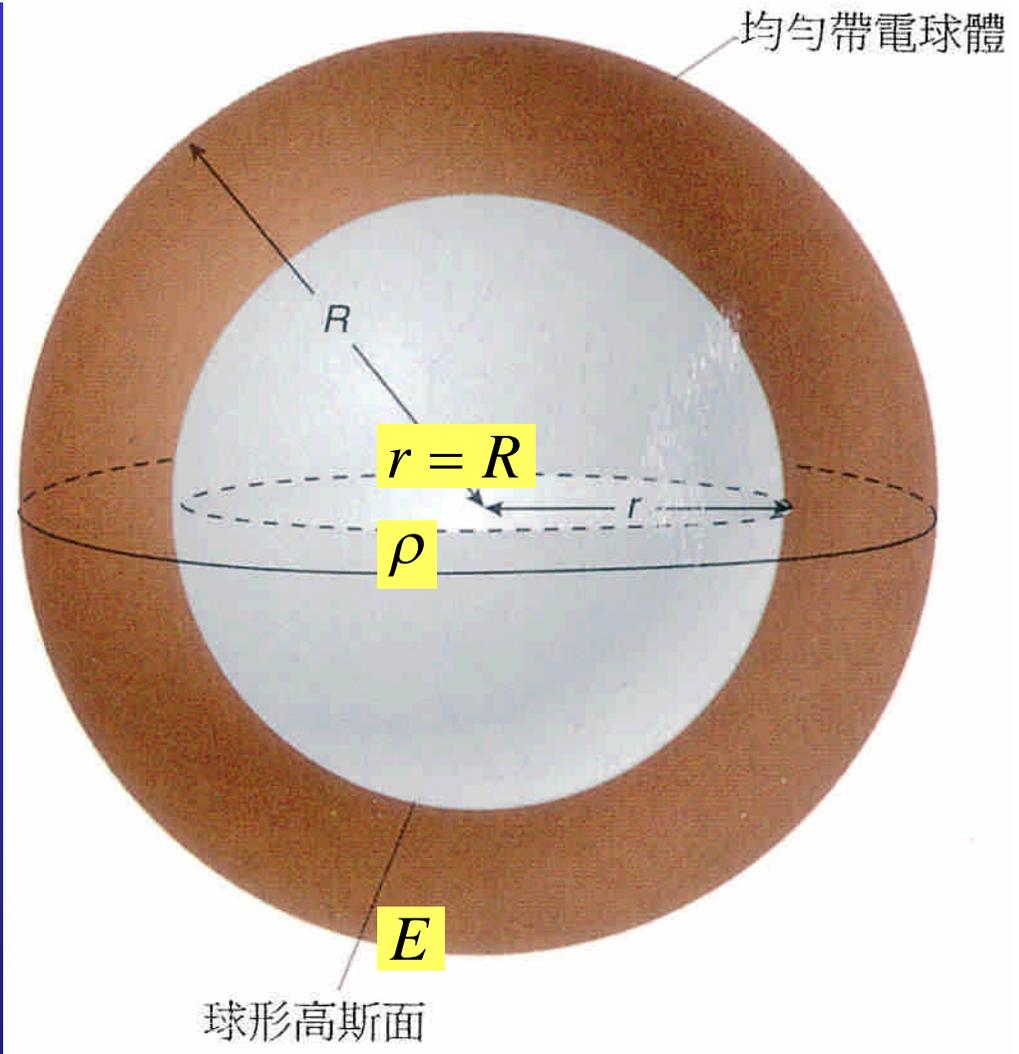


圖 12.96 均勻帶電實心球體

# 無限大均勻帶電平面所建立的電場

- 均勻帶電平面之面電荷密度為  $+\sigma$ 。由幾何對稱可推得電場垂直帶電平面指向外。與帶電平面相距  $z$  之各點，其電場大小都相等，從此對稱觀點，我們選定如圖12.97所示之高斯圓柱面。

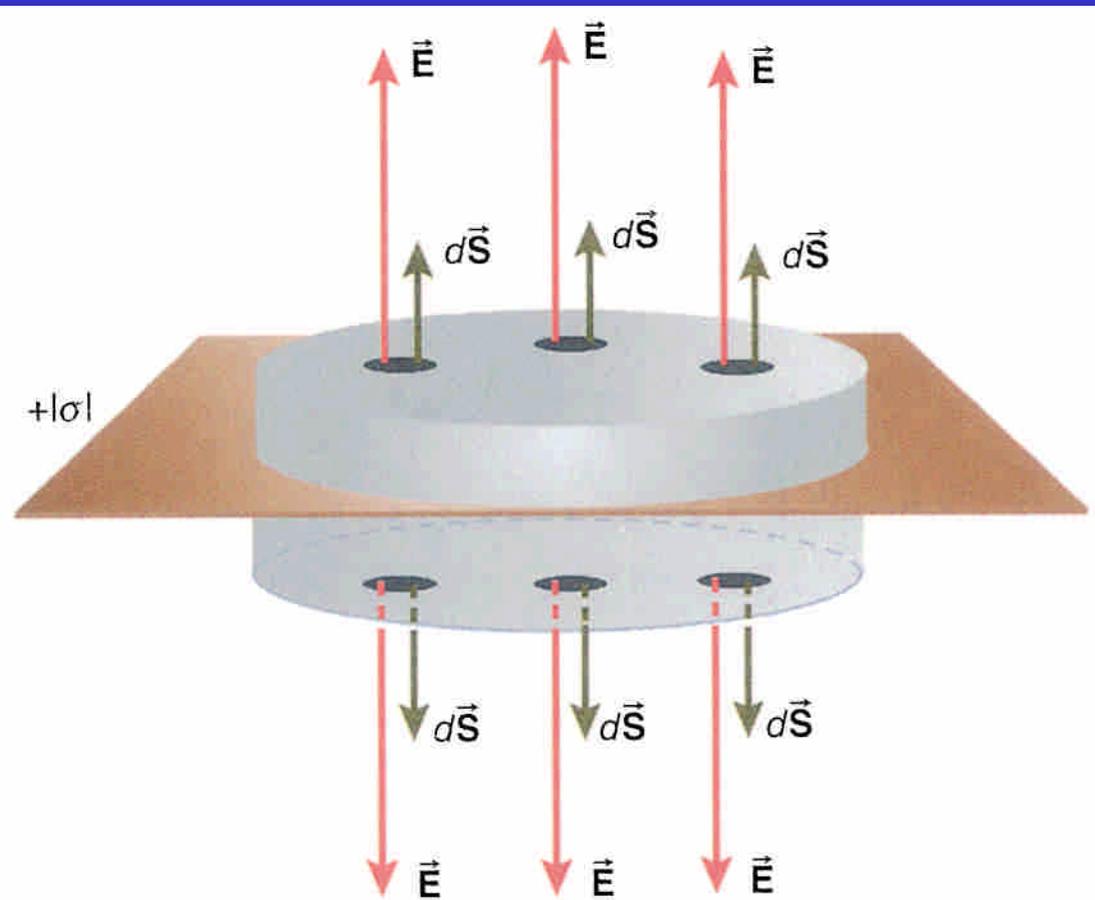


圖 12.97 一個圓柱形高斯面與一帶電平面之交集為一圓形

通過圓柱面周圍的電通量為零，因為電場與圓周面周圍的微小面積垂直。亦即

$$\int_{\text{圓柱周圍}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\int_{\text{上底}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{上底}} E dS = EA$$

$$\int_{\text{下底}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{下底}} E dS = EA$$

➔  $EA + EA = 2EA$

此為高斯定律的左式。  
而此高斯圓柱面內所包含的總電荷為  $|\sigma|A$ 。代入高斯定律

$$2EA = \frac{|\sigma|A}{\epsilon_0}$$

➔  $E = \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0}$

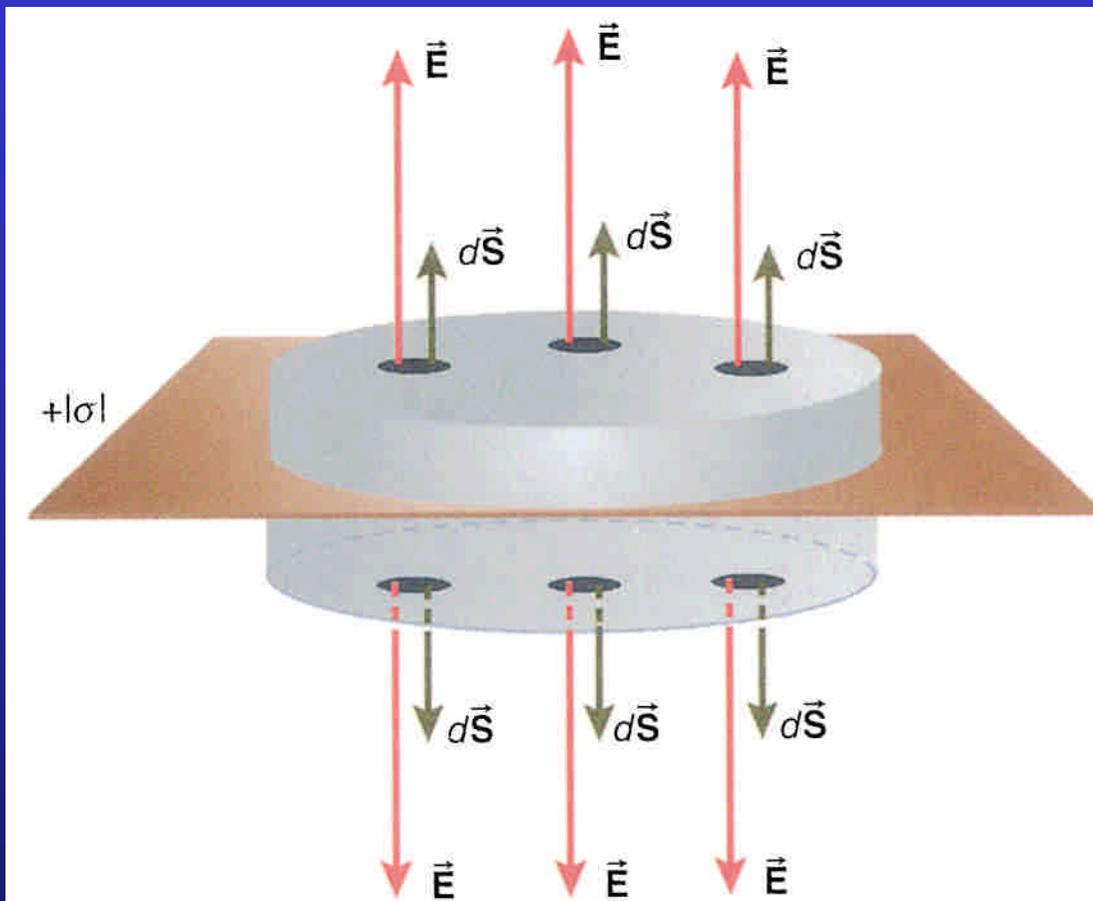


圖 12.97 一個圓柱形高斯面與一帶電平面之交集為一圓形

# 12.12 導體

導體 (Conductors) 內有自由電子，此自由電子不屬於任何原子，不受原子的束縛。這些自由電子可以很自由的、快速的在電場中運動。

## ➤ 導體內之電場

將一導體板置於電場中，如圖 12.98。導體內之自由電子受到外加電場的作用，快速向左移動；由於自由電子的向左聚集，而留下帶正電的離子。導體內部電荷的聚集，產生另一個電場，此電場與外加電場反向

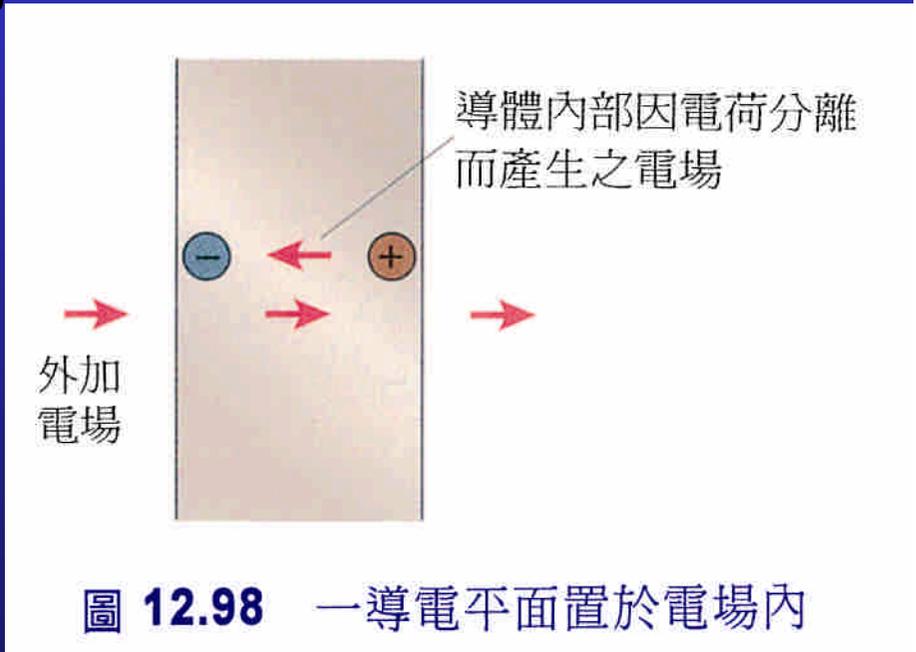


圖 12.98 一導電平面置於電場內

➤ 導體內部正、負電荷的聚集會持續至導體內部電場為零為止。

# 導體內之電場

- 如果將電荷放入導體中，則導體的電荷會重新分佈直至導體內部之電場為0。導體上任一個自由電荷必定存在導體的表面。
- 在導體外部做一高斯面如圖12.100所示。當然，會有電通量貫穿此高斯面，因帶電導體外部之電場並不為零。而此電通量根據高斯定律應為

$$Q / \epsilon_0$$

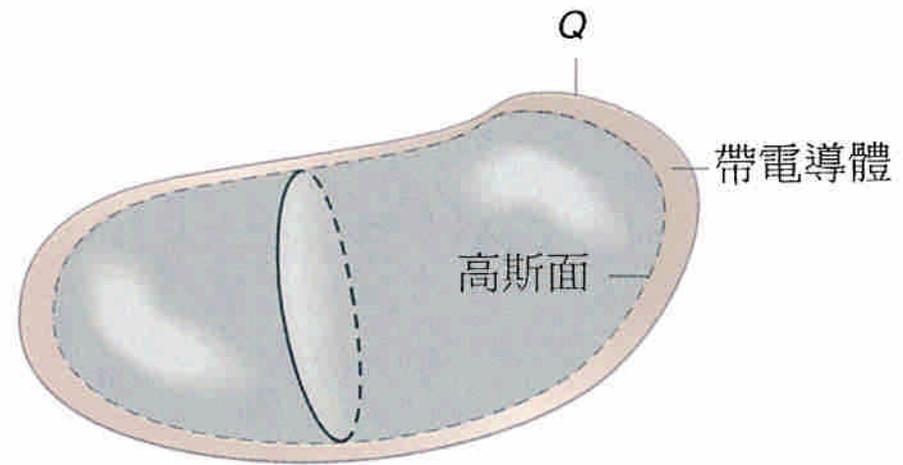


圖 12.99 在導體內部近表面之高斯面

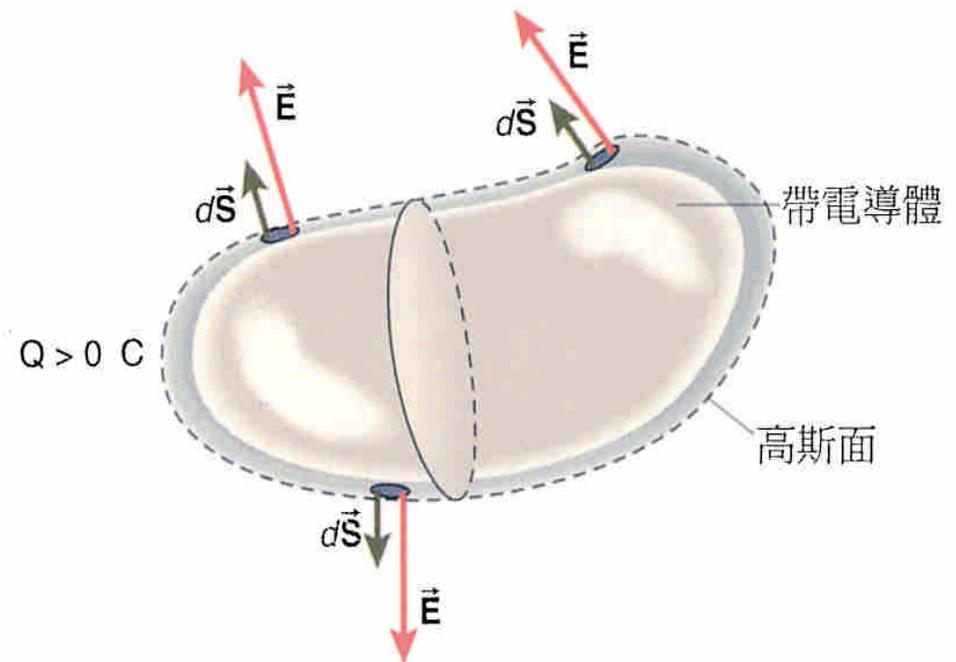


圖 12.100 在導體外部近表面之高斯面

# 導體表面的電場方向

- 我們也可以證明電場與導體表面的微小面積  $d\vec{S}$  的夾角是  $0^\circ$ 。如果，它們的角度不是  $0^\circ$ ，如圖12.101，那麼在導體表面的電場在導體表面必有一分量。此一電場分量將導致自由電子移動。此現象不再是靜電，因電荷在運動。

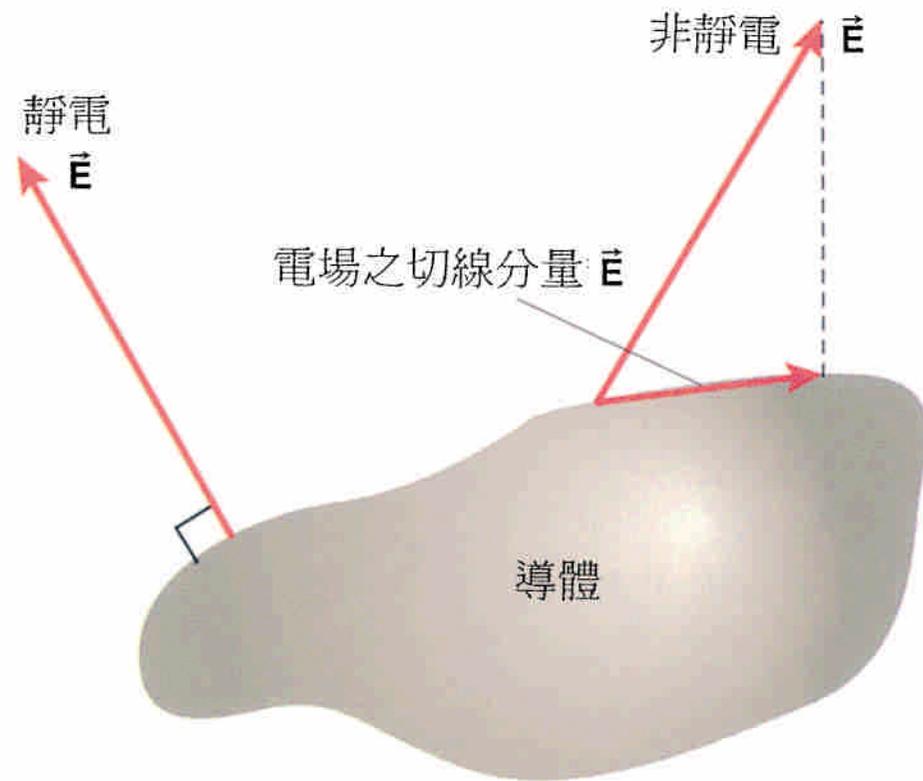


圖 12.101 靜電中，電場必垂直於導體表面。

- 從靜電觀點，導體表面的電場必垂直於導體表面。

# 導體表面的電場大小

- 選定一小塊導體面，如圖12.102。 $\sigma$  表導體此處之面電荷密度， $\sigma > 0$ 。做一個微小高斯圓柱面，圓柱面的一底落在導體內部，另一底則緊鄰於導體，在導體外部。我們所做高斯圓柱面底面積很小，以致底面上各點之電場都相等。

$$EdS = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

- 導體表面的電場為  $\sigma / \epsilon_0$ ，其中為區域面電荷密度  $\sigma$ 。

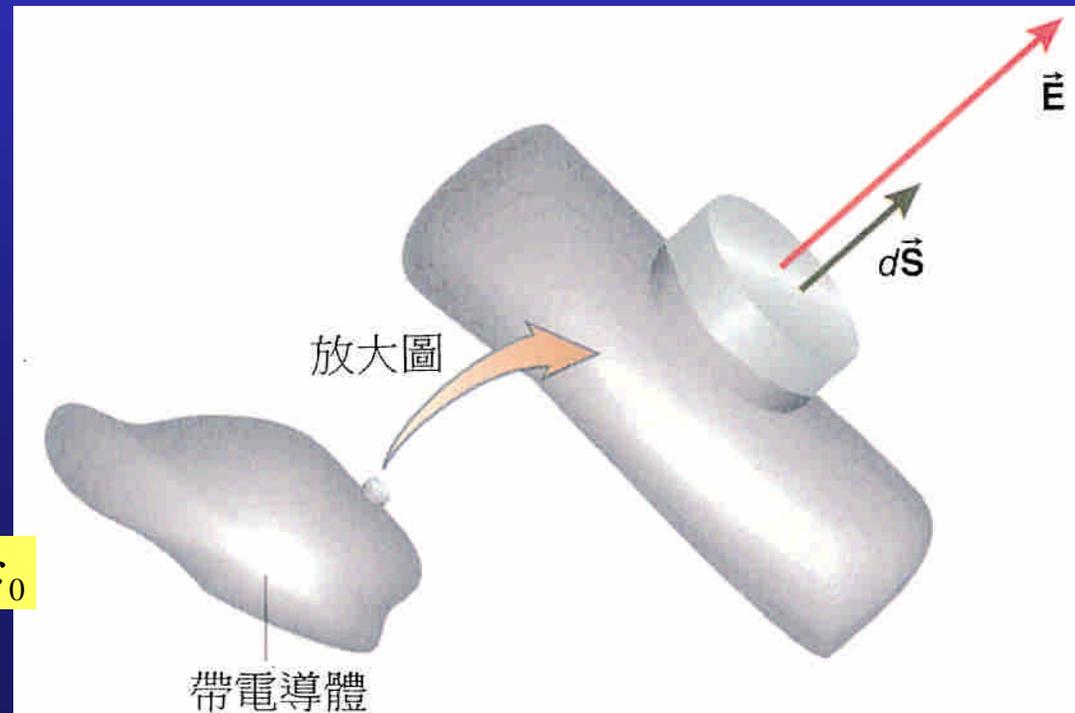


圖 12.102 一個微小之高斯面與導體表面相交集