

電磁感應的法拉第定律

University Physics

Chapter 17

授課教師：陳 柏 穎 副教授

Key Concepts

- 17.1 法拉第電磁感應定律
- 17.2 冷次定律
- 17.3 交流發電機
- 17.4 自 感
- 17.5 理想變壓器

17.1 法拉第電磁感應定律

➤ 實驗一：一塊磁鐵和一個線圈

將一永久磁鐵移近一線圈，如圖17.1。此線圈串聯接上一極為靈敏的檢流計，可偵測出線圈中電流的大小和方向。

1. 若磁鐵固定不動，即當穿過線圈的磁通量保持一定時，檢流計顯示線圈中無電流。

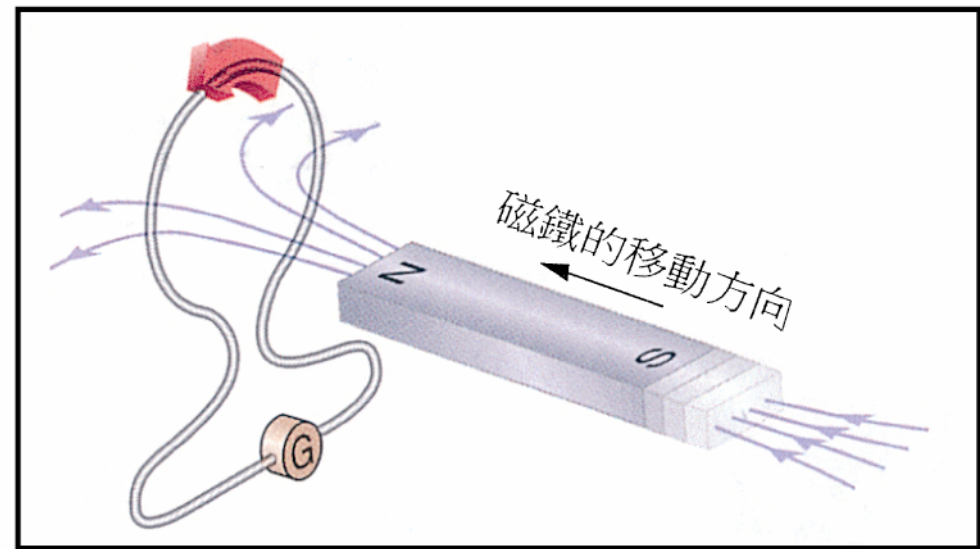


圖 17.1 若磁鐵移近線圈，線圈中可測得電流。

2.若磁鐵移近線圈，因穿過線圈的磁通量隨時間在增加，檢流計即顯示此時線圈中有電流，而且磁鐵的移速加快時，因磁通量的時變率增大，導致線圈中電流變大。

3.若磁鐵移離線圈，如圖17.2，因穿過線圈的磁通量隨時間在減少，致使線圈中的電流反向。同樣的當磁鐵的移速加快時，因磁通量的時變率增大，致使線圈中的電流也變大。

綜合以上，祇要穿過線圈迴路的磁通量隨時間改變時，線圈中即有電流產生而且真的磁通量的時變率愈大時，線圈中電流即愈大，它們成正比

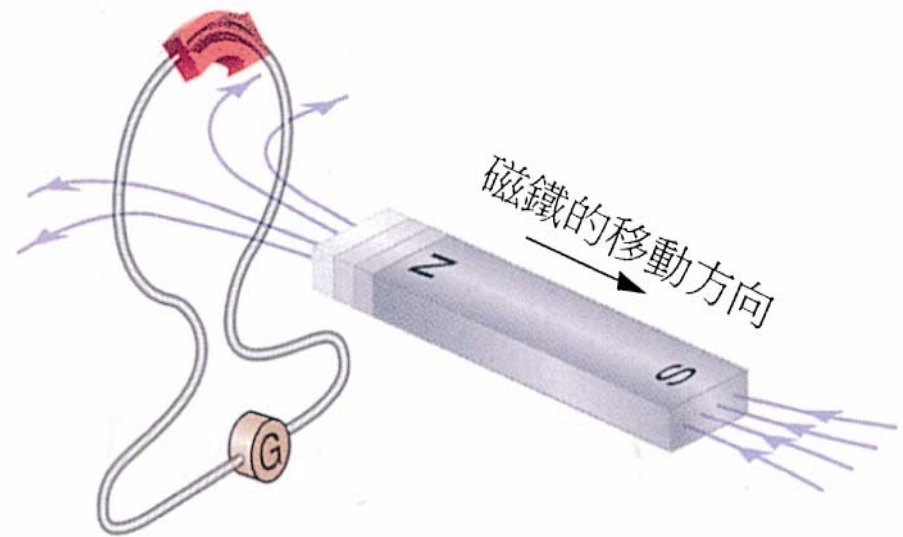


圖 17.2 若磁鐵移離線圈，線圈中可測得電流反向。

- **實驗二：兩個線圈迴路，一個電池和一個開關**
本實驗中沒有永久磁鐵，如圖17.3所示，將實驗一線圈和檢流計電路放置在另一個連接有電池和開關的線圈迴路附近。
- 1.圖右方的接有電池的電路中開關打開著，此線圈迴路中無電流，無法產生磁場，檢流計偵測不到電流。

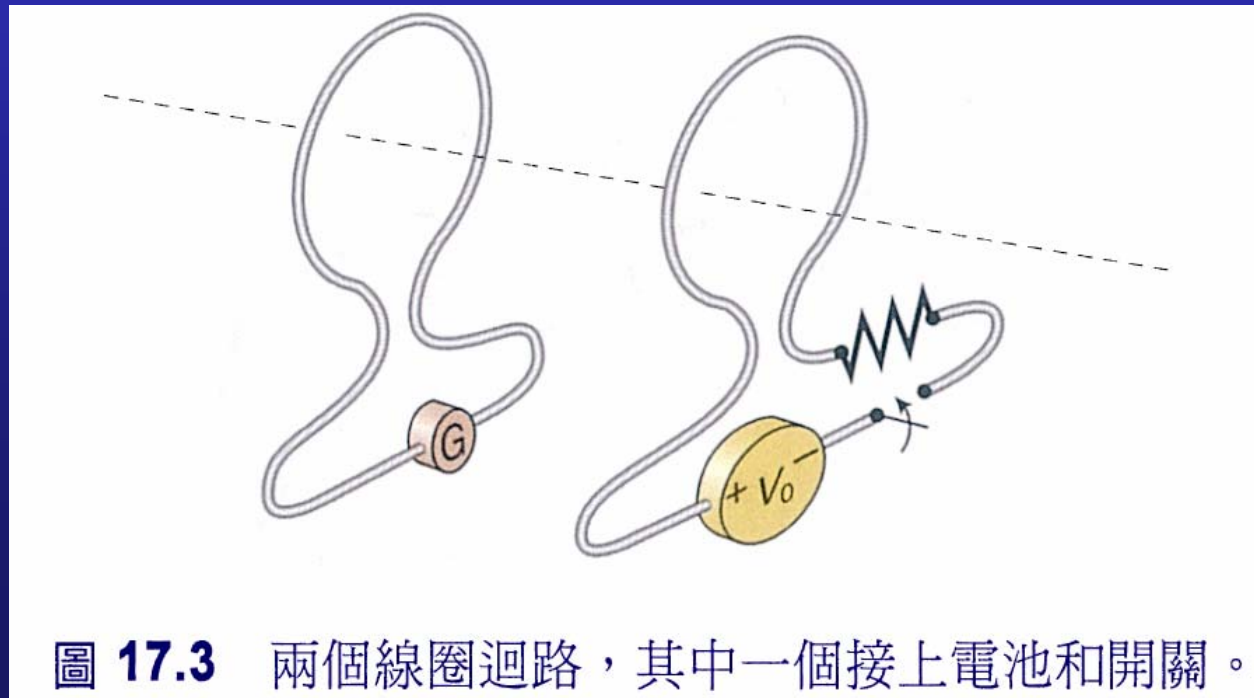


圖 17.3 兩個線圈迴路，其中一個接上電池和開關。

2.現在將開關關上，
電路中即有電流，
如圖17.4。

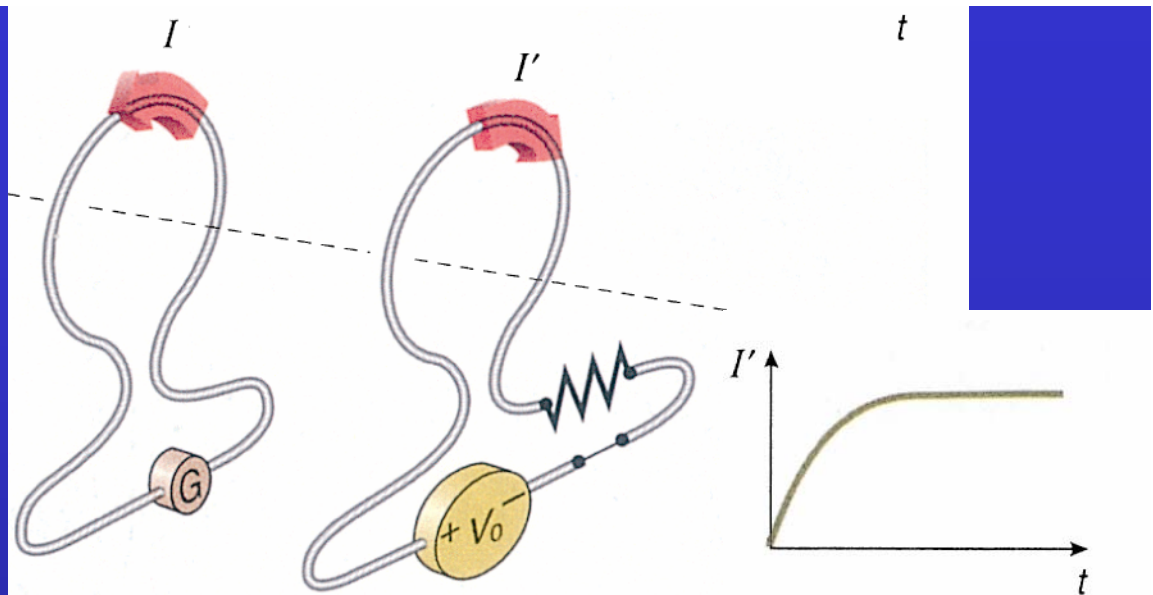


圖 17.4 祇有電流 I' 隨時間增加時，檢流計才可測得電流 I 。

3.再將開關打開，
如圖17.5，在極短
時間內電流會降至
零，檢流計即顯示
電流方向與實驗二
的紀錄2中電流方
向相反

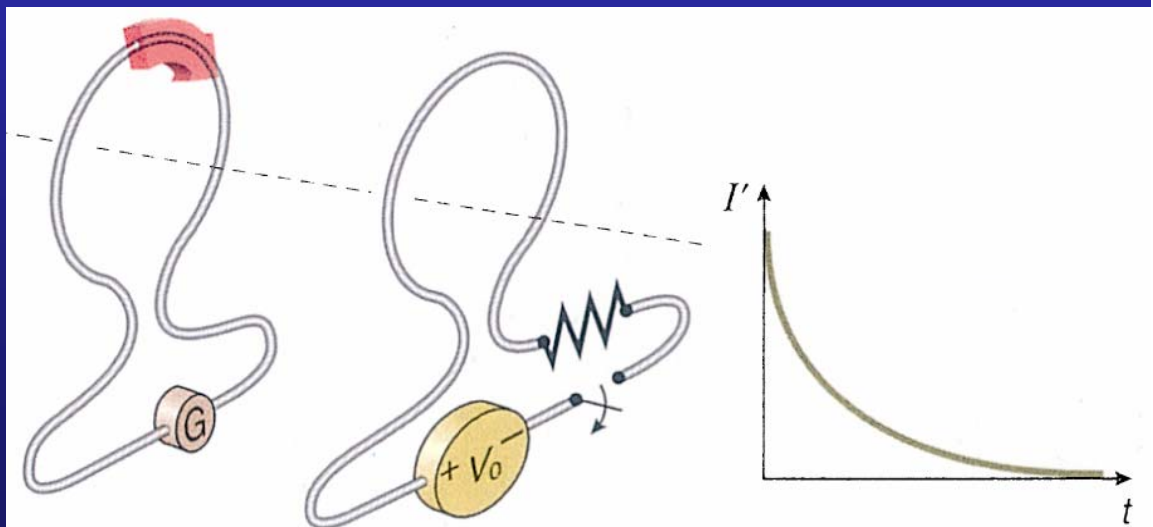


圖 17.5 線圈中電流 I' 隨時間減小時，另一線圈中的電流 I 反向。

- 祇要穿過接有檢流計的迴路的磁通量隨時間改變，該迴路中即有電流產生，此電流稱為**感應電流 (induced current)**。它是由於穿過迴路的磁通量的改變感應而生，而不是由傳統電池所提供。
- 電流當然是相關電荷在運動的表現，電荷在電場的電力作用下作運動：

$$\vec{F}_{\text{elec}} = q\vec{E}$$

因此，我們可以說當穿過迴路的磁通量隨時間改變時，迴路上即產生一個**感應電場 (induced electric field)**，此電場可以使電荷運動而形成檢流計所偵得之電流。

- 我們可以像法拉第一樣做一個實驗：
 - (1) 若磁場不改變，則迴路中無感應電流

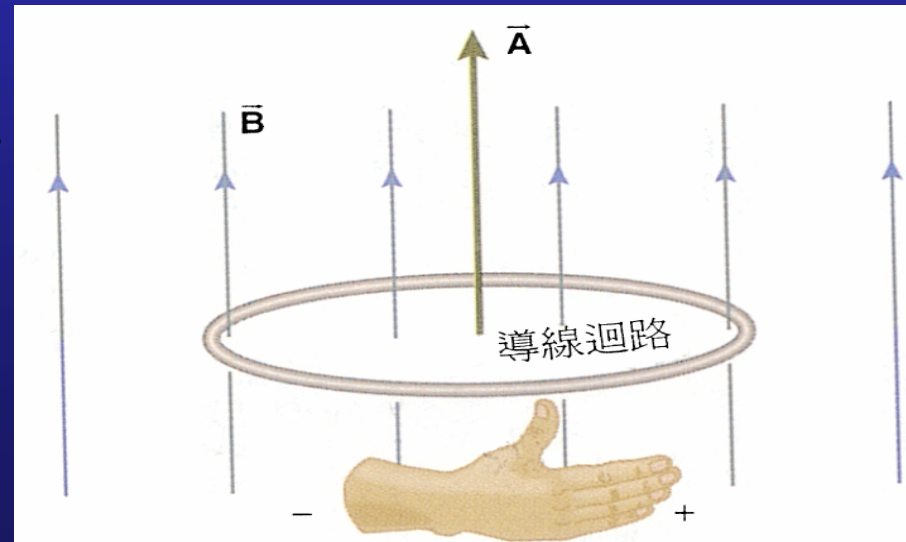


圖 17.6 一個圓線迴路位於均勻磁場

(2)若磁場強度隨時間增大，即穿過迴路的磁通量增多時，則迴路上將產生感應電流其有方向為順時針（如圖17.7所示，即在手手指彎曲所繞的負向）。

(3)若磁場強度隨時間減小，即穿過迴路的磁通量減少時，則迴路上感應電流在迴路的逆時針方向。（如圖17.8，即在手手指彎曲所繞的正向）。

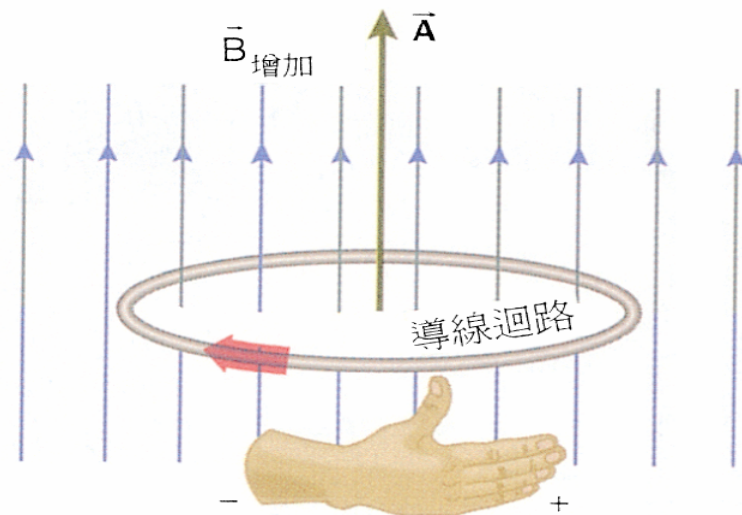


圖 17.7 磁場隨時間增強時，迴路中感應電流在右手手指彎曲負的繞向。

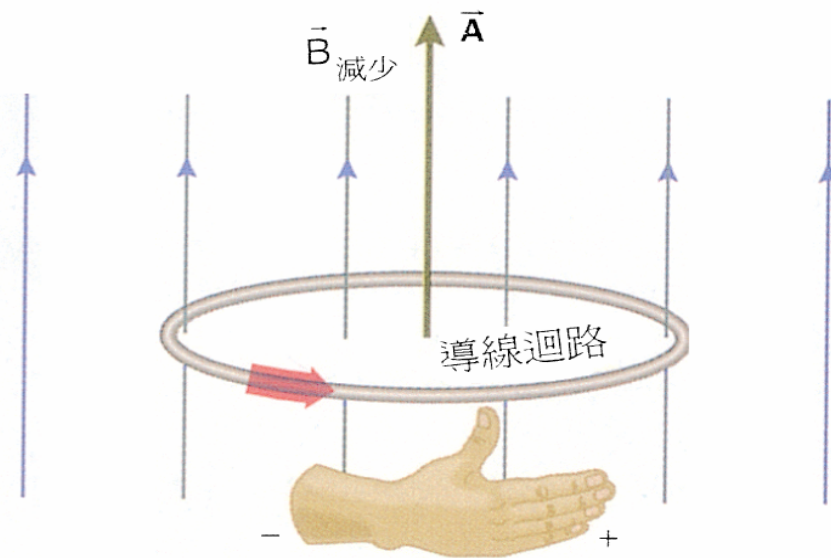


圖 17.8 磁場隨時間減弱時，迴路中感應電流在右手手指彎曲正的繞向。

法拉第電磁感應定律

- 法拉第研究發現上述對單位電荷作功量等於穿過積分路徑的磁通量時變率的負值，即

$$\int_{\text{clsd path}} \mathbf{E} \cdot d\ell = - \frac{d\Phi_{\text{magnetic through the enclosed area}}}{dt}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{magnet}} &= \int \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} \\ &= BA\end{aligned}$$

即是法拉第電磁感應定律 (**Faraday's law of electromagnetic induction**)。

- 感應電動勢 (**induced emf**) 的定義如下

$$\text{induced emf} \equiv \int_{\text{clsd path}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\text{induced emf} = - \frac{d\Phi_{\text{magnet}}}{dt}$$

其SI單位為V (伏特)。
電動勢 (**emf**) 的原文是 **electromotive force**，但它不是作用力，而是兩點的電位差

例題 17.1

穿過一個通有電流迴路的磁通量對時間的變化，如圖17.9。畫出此迴路上感應電動勢對時間的函數圖形。

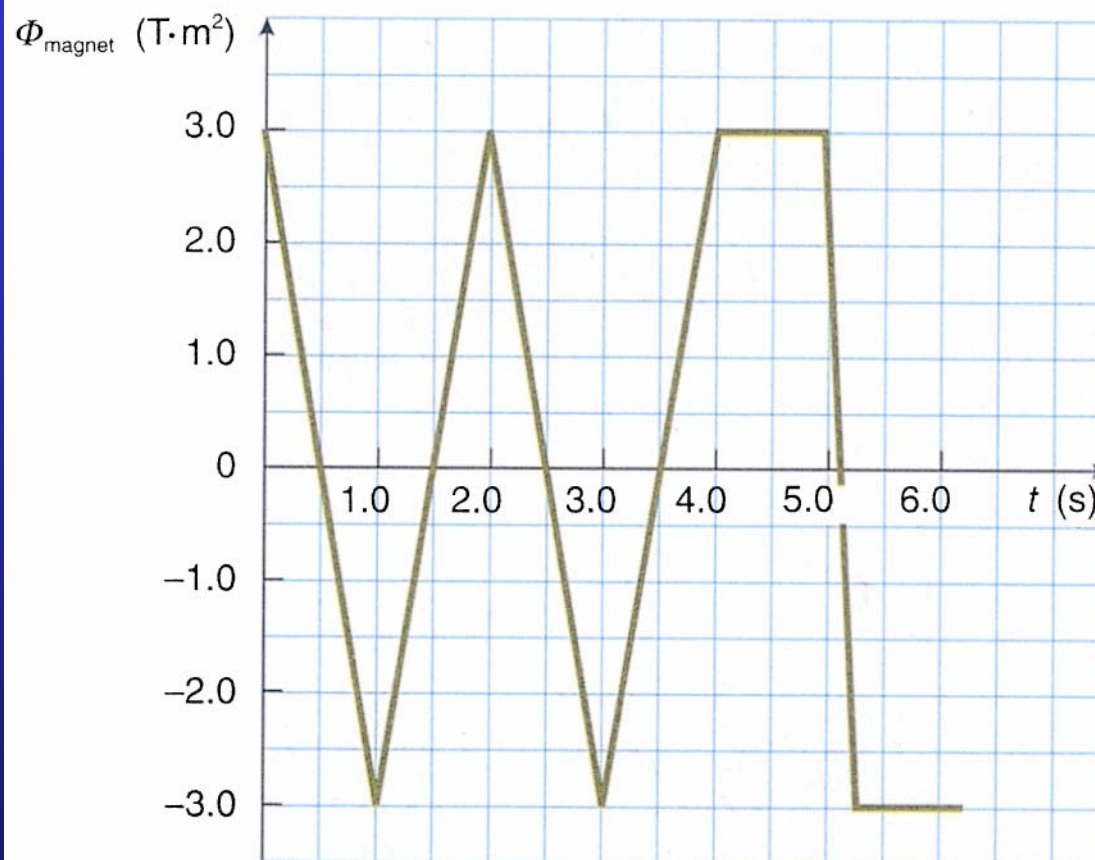


圖 17.9

解-1：

a. 時間 $t = 0 \rightarrow 0.1 \text{ s}$ 的期間：

$$\begin{aligned} \text{感應電動勢} &= -(\text{斜率}) = -\left[\frac{-3.0\text{T} \cdot \text{m}^2 - (3.0\text{T} \cdot \text{m}^2)}{1.0\text{s}} \right] \\ &= 6.0\text{T} \cdot \text{m}^2/\text{s} = 6.0\text{V} \end{aligned}$$

b. 時間 $t = 1.0 \text{ s} \rightarrow 2.0 \text{ s}$ 期間：

$$\text{感應電動勢} = -6.0 \text{ V}$$

c. 時間 $t = 2.0 \text{ s} \rightarrow 3.0 \text{ s}$ 期間：因此段斜率等於a段的斜率，故

$$\text{感應電動勢} = +6.0 \text{ V}$$

d. 時間 $t = 3.0 \text{ s} \rightarrow 4.0 \text{ s}$ 期間：因此段斜率等於b段的斜率，故

$$\text{感應電動勢} = -6.0 \text{ V}$$

例題 17.2

一支長度 l 的金屬棒在均勻磁場 \vec{B} 中，以角速度 $\vec{\omega}$ 繞其一端作旋轉運動（ \vec{B} 平行於 $\vec{\omega}$ ），如圖17.11。求此棒上的感應電動勢值，還有棒上那端的電位高？



解-1：

方法1

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{magnet}} &= q\vec{v} \times \vec{B} \\ &= (-e)\vec{v} \times \vec{B}\end{aligned}$$



$$F_{\text{magnet}} = evB$$

$$eE = evB$$

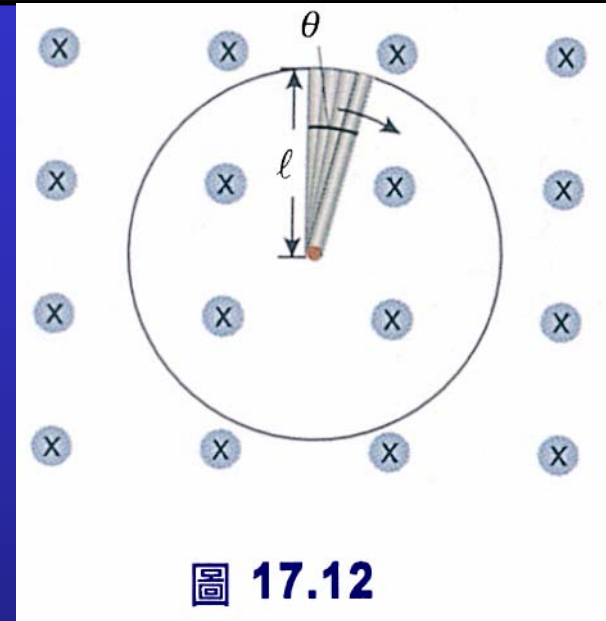
$$E = vB \quad v = r\omega$$

$$E = r\omega B$$

$$\vec{E} = -\omega Br\hat{r}$$



$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{r}$$



$$\begin{aligned}V_{\text{末端}} - V_{\text{樞鈕端}} &= -\int_0^l (-\omega Br\hat{r}) \cdot dr\hat{r} \\ &= \omega B \int_0^l r dr \\ &= \frac{\omega B l^2}{2}\end{aligned}$$

解-2：

方法2：決定了圖17.12中穿過圓心角 θ 的扇形區域的磁通量，便可算出感應電動勢的大小。角度 θ 的單位使用徑時，此扇形區的面積 (S) 等於整個面積的 $\theta/2\pi$ 倍：

$$S = \frac{\theta}{2\pi} \pi l^2 = \frac{\theta l^2}{2}$$

$$\Phi = \int \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

$$\Phi = BS = B \frac{\theta l^2}{2}$$

$$\rightarrow |\text{induced emf}| = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{Bl^2}{2} \left| \frac{d\theta}{dt} \right| = \frac{\omega Bl^2}{2}$$

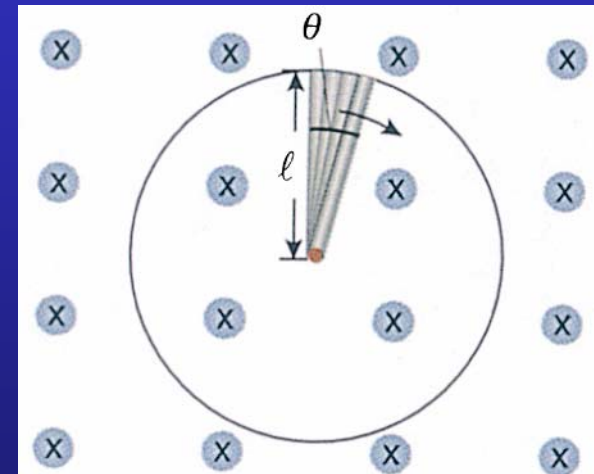


圖 17.12

而且金屬棒的外端具有較高的電位。

17.2 冷次定律 (Lenz's Law)

- 法拉第提出電磁感應定律沒多久，冷次 (Heinrich Emil Lenz 1804-1865) 就發現了決定一個封閉的導線迴路（同法拉第定律的封閉路徑）中感應電流方向的法則，此法則即是冷次定律 (Lenz's Law)。其實冷次定律純粹是一個幫助大家容易理解感應電場和電流的方法。
- 冷次定律 (Lenz's Law)：感應電流的方向在產生反抗感應磁通量之改變。

例題 17.3

用冷次定律決定圖17.13中迴路上的感應電流方向。(此為之前介紹法拉第定律時的第一個實驗的圖17.13一部份：一個永久磁鐵移向一個接有檢流計的線圈迴路)



圖 17.13

解：

穿過迴路的磁場增強導致磁通量增大，此時感應電流的方向在其所產生的磁場能反抗接近的磁場（來自磁鐵）。故感應電流產生的磁場方向自迴路左邊穿過其右邊以反抗增大的磁場（即減少穿過迴路的磁通量）。

→ 用你的右手抓住迴路，大姆指除外的四指彎曲自迴路的左邊穿至右邊，伸直的大姆指向即是感應電流方向。

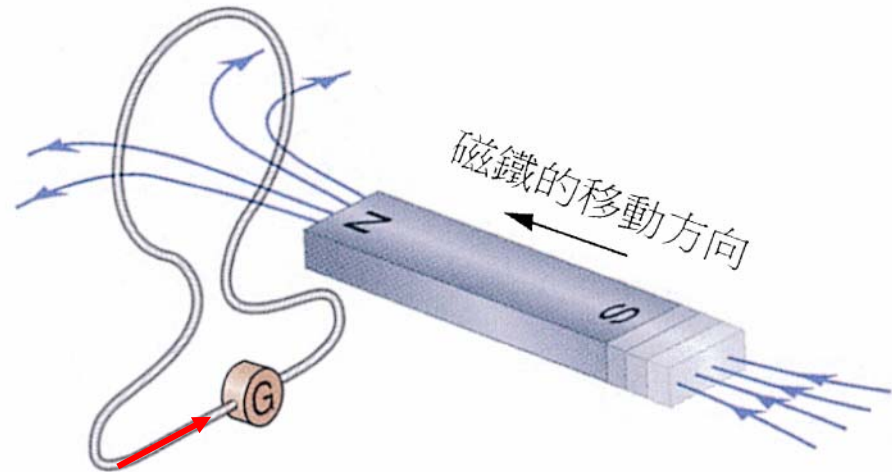


圖 17.13

例題 17.4

將圖17.14中的開關關上，這是第17.1節的第二個實驗，用冷次定律決定另一線圈迴路中感應電流的方向。



圖 17.14

解：

圖中右電路中的電流在短時間內變大，其產生的磁場隨時間增強，此時穿過左迴路的磁通量也隨時間增加。依楞次定律，迴路中感應電流要能反抗此改變。因穿過左迴路的磁場在增強，故感應電流產生的磁場方向需與增大的磁場方向相反，才可反抗此改變。一樣用你的右手大姆指除外的四指彎曲自迴路左邊至右邊，此時大姆指向即是感應電流方向，如圖 17.15。

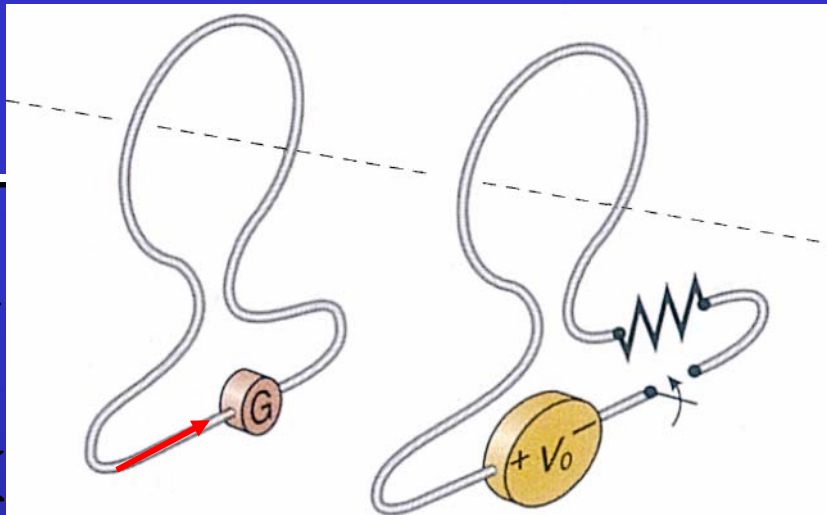


圖 17.14

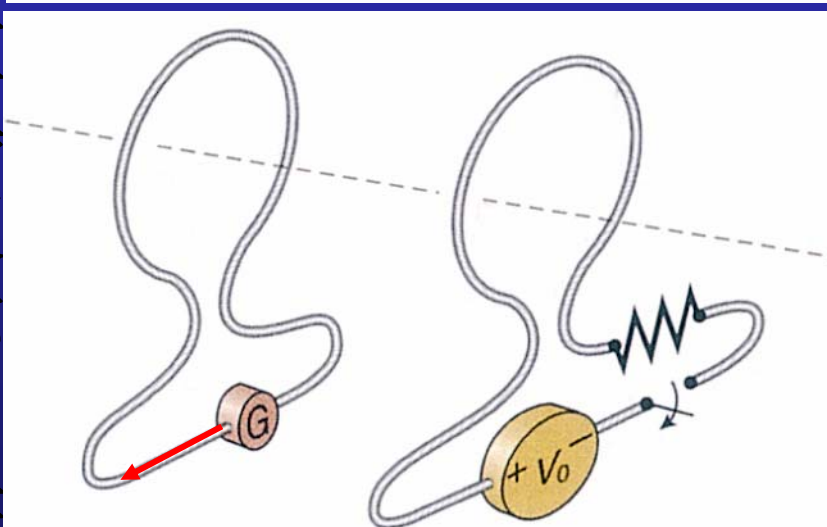


圖 17.15

例題 17.5

均勻磁場 \vec{B} 中有一個緊密繞成50匝的線圈（總電阻 0.20Ω ，每一匝導線所圍面積 60 cm^2 ），如圖 17.16 所示。若磁場強度在 1.50 s 時間內自 0 T 均勻增大為 2.0 T ，求

- 線圈中的感應電動勢
- 線圈中的感應電流值
- 線圈中的感應電流方向

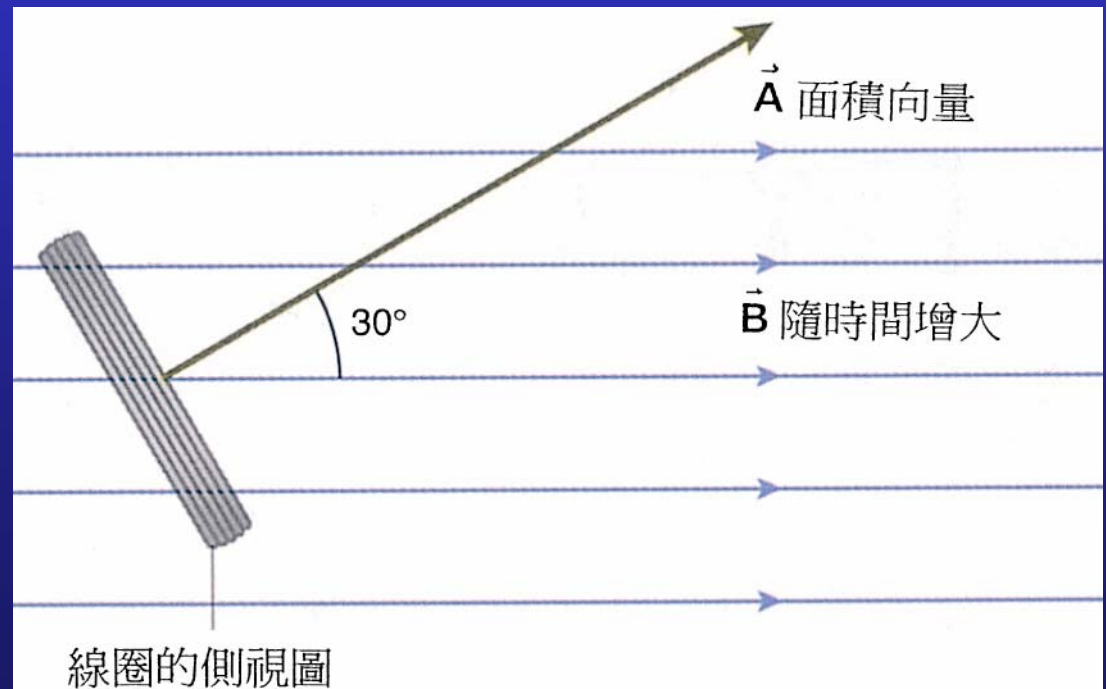


圖 17.16 線圈的側視圖

解：

a. 穿過線圈的每一匝導線圈的磁通量

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{單匝}} &= \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{A}} \quad (\vec{\mathbf{B}} = \text{均勻磁場}) \\ &= BA \cos \theta\end{aligned}$$


$$\Phi_{\text{總}} = NBA \cos \theta$$

$$\text{induced emf} = -\frac{d\Phi_{\text{總}}}{dt} = -\frac{d(NBA \cos \theta)}{dt}$$

$$\text{induced emf} = -(NA \cos \theta) \frac{dB}{dt}$$

$$\frac{dB}{dt} = \frac{2.0 \text{ T} - 0 \text{ T}}{1.50 \text{ s}} = 1.3 \text{ T/s}$$

$$N = 50, A = 60 \text{ cm}^2 = 60 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \quad \theta = 30^\circ$$


$$\begin{aligned}\text{induced emf} &= -50(60 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(\cos 30^\circ)(1.3 \text{ T/s}) \\ &= -0.34 \text{ V}\end{aligned}$$

解：

b. 利用歐姆定律可得線圈中感應電流值

$$I = \frac{|\text{induced emf}|}{R} = \frac{0.34 \text{ V}}{0.20 \Omega} = 1.7 \text{ A}$$

c. 因穿過線圈的磁通量隨時間增大，故感應電流產生的磁場與外加磁場方向相反。用你的右手抓住線圈，大姆指除外的四指彎曲繞穿過線圈的方向與外加磁場方向恰相反，如圖17.17。

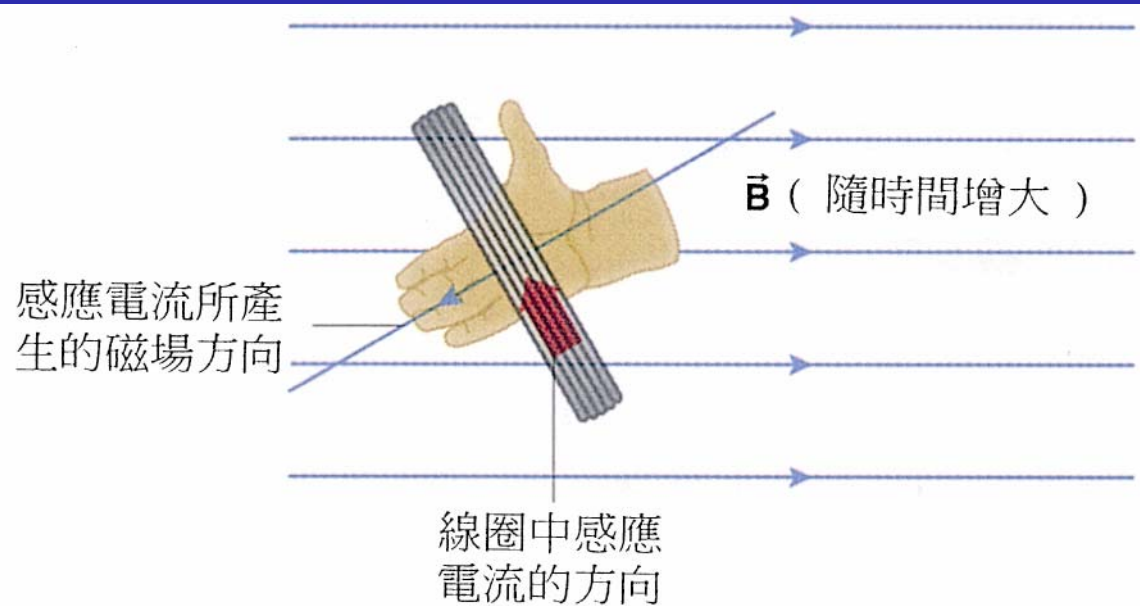


圖 17.17

17.3 交流發電機

- 現考慮一個均勻磁場 \vec{B} 中有一個面積向量 \vec{A} 的平面式線圈，如圖17.18。穿過此線圈迴路的磁通量

$$\Phi_{\text{magnet}} = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = BA \cos \theta$$

$$\Phi_{\text{magnet}} = BA \cos(\omega t)$$

$$\begin{aligned} \text{induced emf} &= -\frac{d\Phi_{\text{magnet}}}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt}[BA \cos(\omega t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{induced emf} &= -BA[-\sin(\omega t)]\omega \\ &= BA\omega \sin(\omega t) \end{aligned}$$

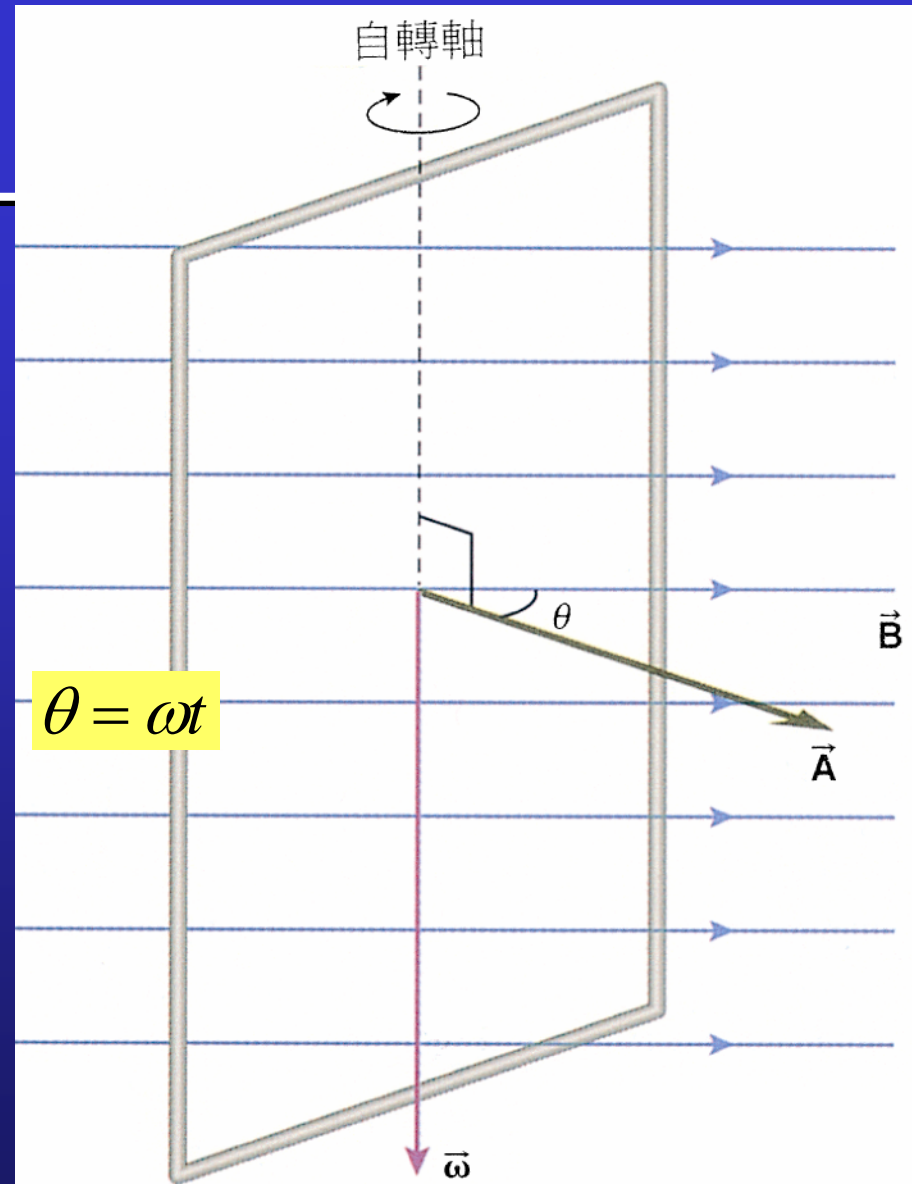


圖 17.18 一線圈在均勻磁場中轉動

交流發電機

$$\begin{aligned}\text{induced emf} &= -BA[-\sin(\omega t)]\omega \\ &= BA\omega \sin(\omega t)\end{aligned}$$

➤ 此感應電動勢隨時間振盪變化，表現正弦函數關係，如圖17.19。

➤ 若將上述單一迴路換成匝（每匝迴路所圍面積均為）的線圈，則穿過整個線圈的磁通量等於穿過單一迴路磁通量的倍，且整個線圈上感應電動勢

$$\text{induced emf} = NBA\omega \sin(\omega t)$$

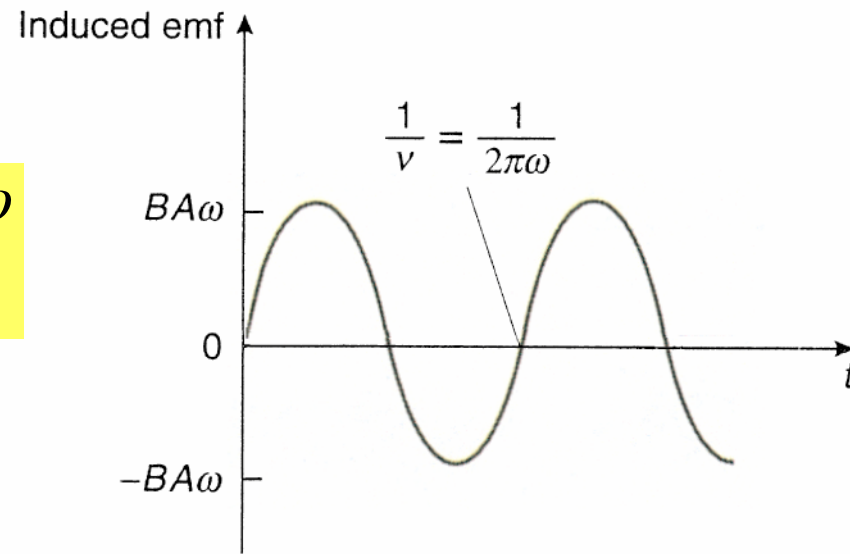


圖 17.19 線圈迴路中的感應電動勢—時間的正弦函數關係

例題 17.6

你受託設計一交流發電機，其線圈需以60 Hz在 $B = 0.150 \text{ T}$ 的強磁場中旋轉，且此發電機的電動勢峰值至少為170 V，又所使用正方形線圈的邊長為10.0 cm，求所需的線圈匝數。

解：

由式 (17.8) 得旋轉的線圈中感應電動勢

$$V_{\text{source}}(t) = NBA\omega \sin(\omega t)$$

$$V_0 = NBA\omega$$

$$N = \frac{V_0}{BA\omega}$$

$$\begin{aligned}\omega &= 2\pi\nu = (2\pi \text{ rad})(60.0 \text{ Hz}) \\ &= 377 \text{ rad / s}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}N &= \frac{170 \text{ V}}{(0.150 \text{ T})(0.100 \text{ m})(0.100 \text{ m})(377 \text{ rad / s})} \\ &= 301\end{aligned}$$

17.4 自感

- 電感器（線圈）的自感 (self-inductance) L 定義為穿過線圈內的總磁通量 (Φ_{magnet}) 對電流的比值：

$$L \equiv \frac{\Phi_{\text{magnet}}}{I}$$

電感值的SI單位為

$$1 \text{ H (亨利)} \equiv 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 / \text{A}$$

$$\Phi_{\text{magnet}} = LI$$

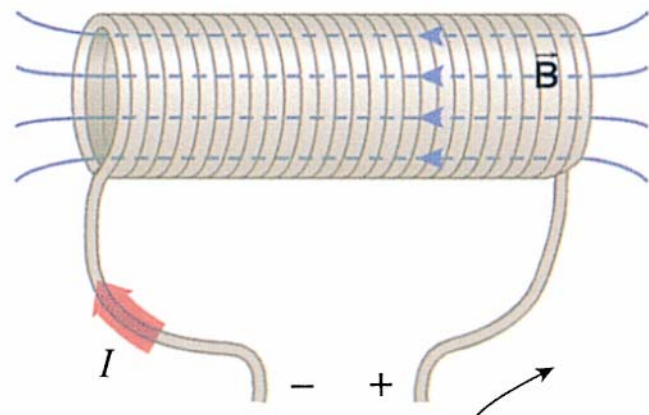
$$\text{induced emf} = -\frac{d\Phi_{\text{magnet}}}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

自感

- 若此線圈的導線繞向相反（如圖17.24），一樣電流仍隨時間增加時，我們仍可得到同樣的感應電流方向和感應電動勢的極性。
- 現在特別定義線圈的電位差

$$V \equiv -\text{induced emf}$$

$$V = L \frac{dI}{dt}$$



電流隨時間增加時，感應電動勢的特性

電流隨時間增加時，感應電流的方向

圖 17.24 此線圈的導線繞法與圖 17.30 相反，但感應電源方向和感應電動勢的極性仍不變。

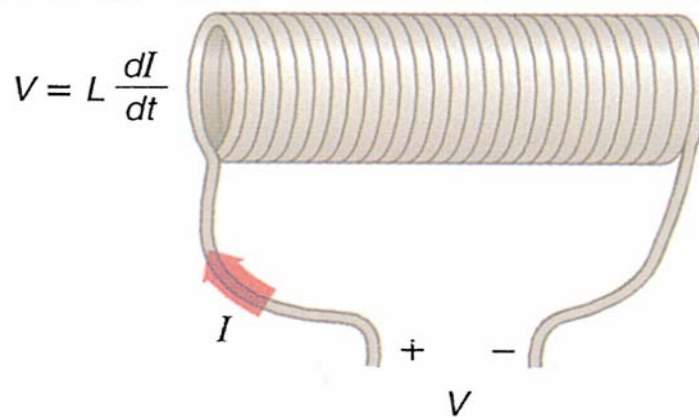


圖 17.25 式 (17.13) 和式 (17.14) 定義的電位差的+、-極性。

電阻器、電容器、電感器

- 以前已學過的電阻器，電路中電流流進其正極，它的電位差的+、-極性如圖17.26。又電容器如圖17.27充電時，其電位差的+、-極性是那樣表現。值得注意的是當此電位差不隨時間改變時，電路中的電流為零，此時電容器就像是一個斷路直流源。
- 而電感器也一樣，如圖17.28所示，當電路中的電流那樣流時，其電位差的+、-極性就是那樣表現。

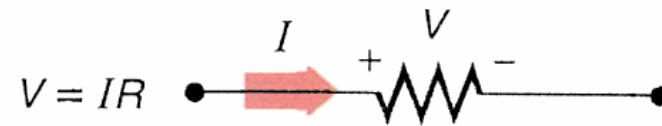


圖 17.26 電阻器的+、-極性。

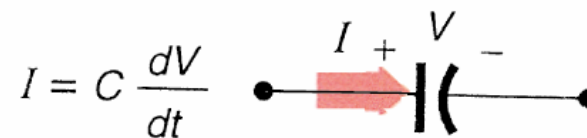


圖 17.27 電容器的+、-極性。

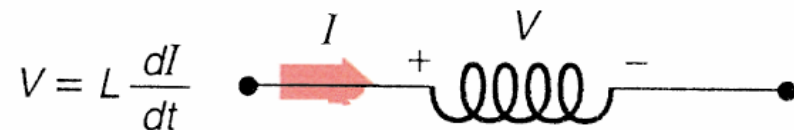


圖 17.28 電感器的+、-極性。

例題 17.7

計算長度為 l 的長螺線管 (a long solenoid) 的自感值 L 。設 n 為螺線管軸向上單位長度每米的繞線匝數，且每一匝導線圈圍成面積 A ，並假設所有磁力線都在螺線管中。

解：

由式 (17.9) 得自感值

$$L = \frac{\Phi_{\text{magnet}}}{I}$$

$$B = \mu_0 n I$$

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{magnet}} &= n \ell B A \\ &= n \ell \mu_0 n I A \\ &= n^2 \ell A \mu_0 I\end{aligned}$$



$$L = \frac{\Phi_{\text{magnet}}}{I} = \mu_0 n^2 A \ell$$

17.5 理想變壓器

- 一個理想的變壓器有兩個互相絕緣的線圈，而且每個線圈的電流所產生的全部磁力線完全穿過另一個線圈，（即磁力線無漏失，實際上要符合這樣的理想條件，有兩種近似作法：
- (1) 如圖17.29，將兩個線圈相互緊密纏繞。
 - (2) 如圖17.30，使用高鐵磁性材料（例如鐵）連結兩個線圈。

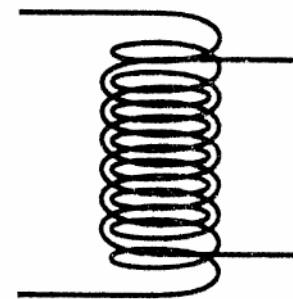


圖 17.29 一線圈和另一線圈緊密纏繞

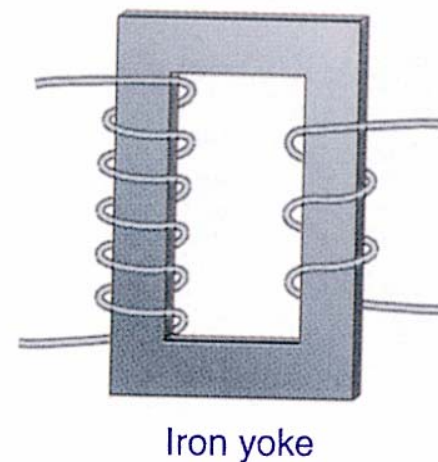


圖 17.30 兩個線圈分別繞在軛形鐵上

理想變壓器

- 一個理想的變壓器便具有以下特性：穿過每一匝導線迴路（兩個線圈都一樣）的磁通量都相等

○

穿過線圈 1 的總磁通量 = $N_1 \Phi$

穿過線圈 2 的總磁通量 = $N_2 \Phi$

$$\text{線圈 1 的感應電動勢} = \frac{-d}{dt}(N_1 \Phi) = -N_1 \frac{d\Phi}{dt}$$

(因 N_1 值一定)

$$\text{線圈 2 的感應電動勢} = \frac{-d}{dt}(N_2 \Phi) = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

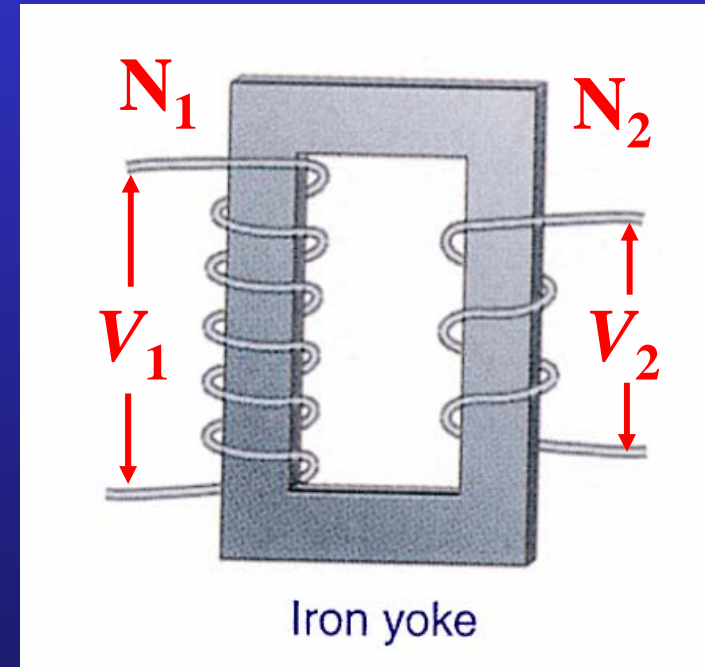
(因 N_2 值一定)

$$V_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt}$$

$$V_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

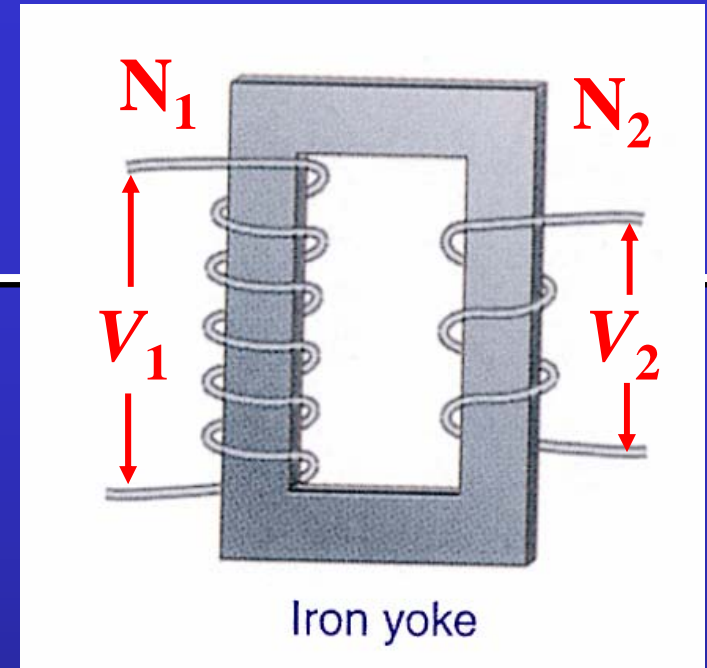


$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}$$



$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (17.17)$$

一個變壓器的輸入線圈習慣上稱作原線圈 (**the primary coil**)，其輸出線圈習慣上稱作副線圈 (**the secondary coil**)。



- 遞升的變壓器 (**a step-up transformer**)：
其輸出電位差 V_2 大於輸入電位差 V_1 ，又由式 (17.17) 可得。 $N_2 > N_1$
- 遞降的變壓器 (**a step-down transformer**)：
其輸出電位 V_2 小於輸入電位差 V_1 ，也由式 (17.17) 可得 $N_2 < N_1$ 。

理想變壓器

- 符號習慣上，在變壓器的電路符號圖（如圖 17.32）旁邊使用點（dots）記號表示電位差的極性，我們可以不管兩個線圈的導線繞法。

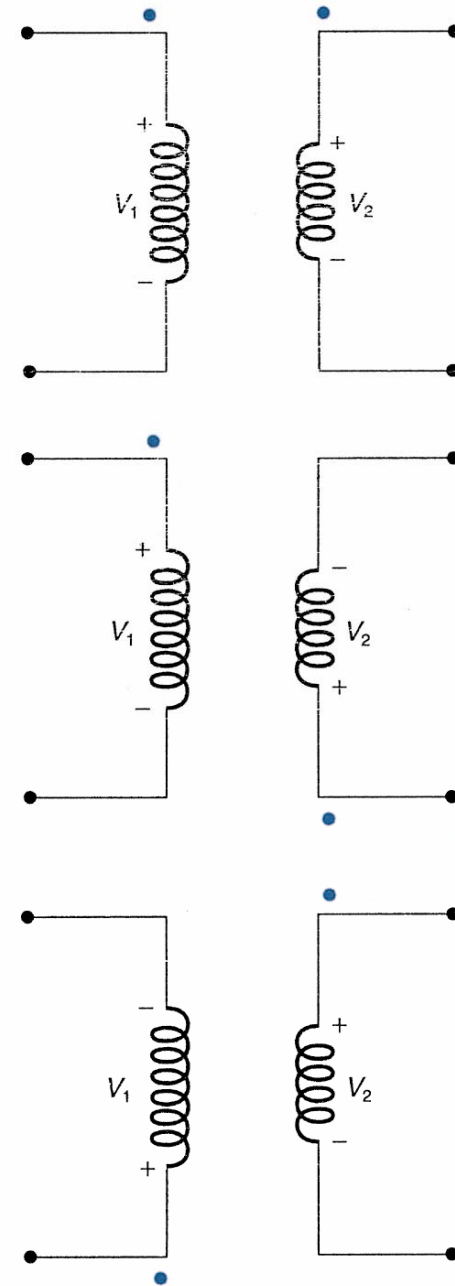


圖 17.32 點符號 (dots) 表示變壓器中兩個線圈的電位同極位置

理想變壓器

- 一理想的變壓器系統，其總能量既不增加，也不會消失，故其原線圈、副線圈所得到的電功率總和等於零。看圖17.33

$$I_1 V_1 + I_2 V_2 = 0$$

$$I_2 = -\frac{V_1}{V_2} I_1$$

$$I_2 = -\frac{N_1}{N_2} I_1$$



$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = -\frac{I_2}{I_1}$$

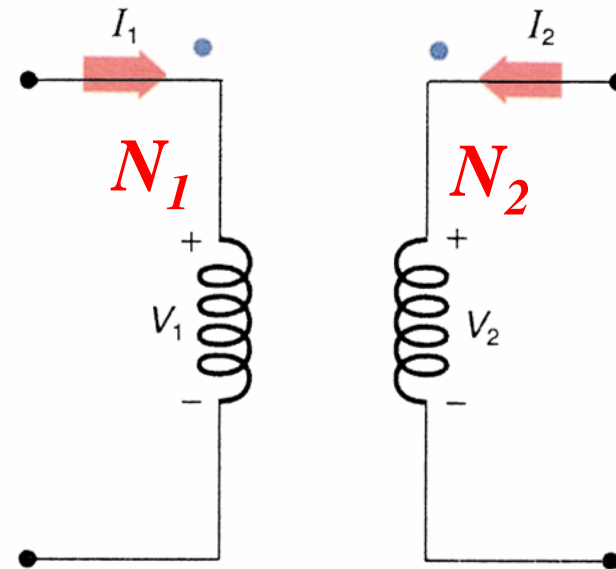


圖 17.33 符號習慣上，電流流進電位“+”端。

例題 17.8

一個普通的遞減變壓器，其輸入電位差為14.5 kV、輸出為120 V

- 求其原線圈與副線圈的繞線匝數比值。
- 若其副線圈中電流最大值為300 A，求原線圈中最大電流值。

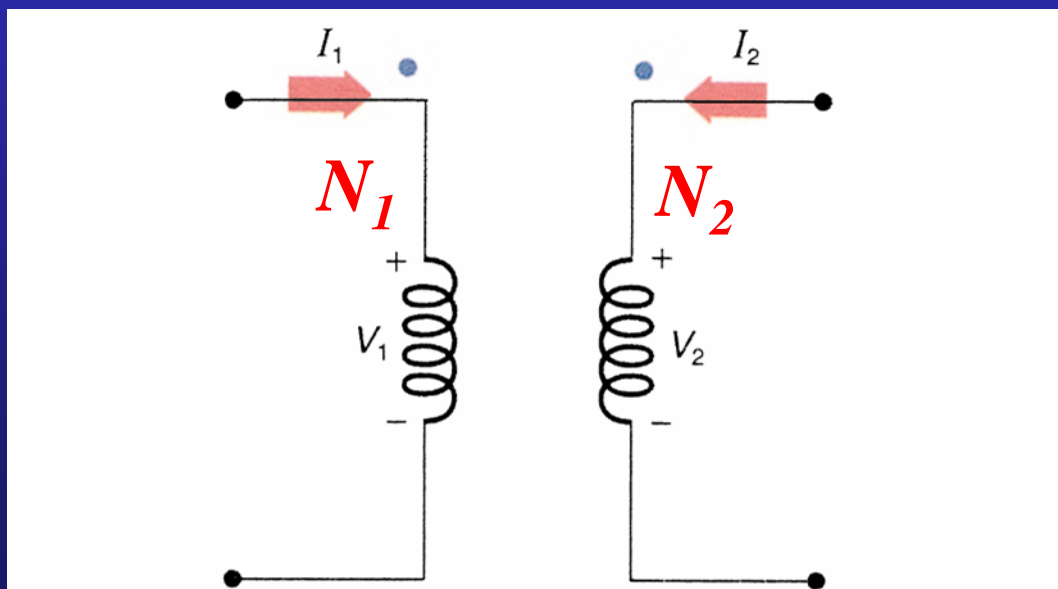


圖 17.33 符號習慣上，電流流進電位“+”端。

解：

a. 由式 (17.17) 得原線圈與副線圈的繞線匝數比值為

$$\rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{14.5 \times 10^3 \text{ V}}{120 \text{ V}} = 121$$

b.

$$N_2 I_2 = -N_1 I_1$$

$$\rightarrow I_1 = -\frac{N_2}{N_1} I_2 = -\frac{1}{121} (300 \text{ A}) \\ = -2.48 \text{ A}$$

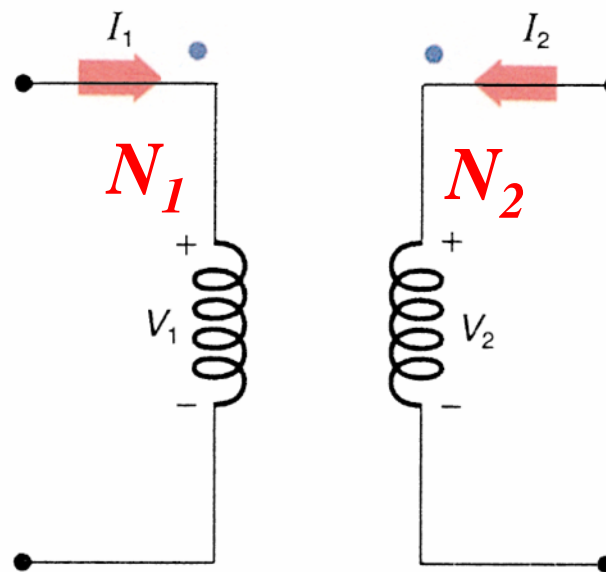


圖 17.33 符號習慣上，電流流進電位“+”端。